

experiencia, su ingenio y buen juicio, el análisis matemático ha demostrado su utilidad tanto en predicciones de largo como de corto alcance.

## RESUMEN DE LOS PASOS FUNDAMENTALES EN EL ANÁLISIS DE SERIES EN EL TIEMPO

1. Recoger datos para la serie en el tiempo, procurando que esos datos sean fiables. Tener siempre presente el objetivo eventual de la serie en el tiempo; por ejemplo, si uno quiere predecir una serie en el tiempo dada, puede ser útil obtener series en el tiempo relacionadas (así como cualquier otra información). Si es necesario, se ajustan los datos que han de ser comparados, teniendo en cuenta años bisiestos, vacaciones, etc.
2. Representar gráficamente la serie en el tiempo, observando cualitativamente la presencia de variaciones y de variaciones de tendencia a largo término y cíclicas.
3. Construir la curva o recta de tendencia a largo término, y obtener los valores de tendencia apropiados usando los métodos de mínimos cuadrados, «a mano», promedios móviles o semipromedios.
4. Si hay variaciones estacionales, obtener un índice estacional y desestacionalizar los datos (o sea, ajustar los datos a las variaciones).
5. Ajustar los datos desestacionalizados a la tendencia. Los datos resultantes contienen (teóricamente) sólo variaciones cíclicas e irregulares. Un promedio móvil de 3, 5 ó 7 meses servirá para remover las variaciones irregulares, revelando las variaciones cíclicas.
6. Representar gráficamente las variaciones cíclicas obtenidas en el paso 5, observando cualquier periodicidad, exacta o aproximada, que pueda estar presente.
7. Si se desea una predicción, hágase combinando los resultados de los pasos 1 a 6 y utilizando toda otra información disponible. Identificar y evaluar todas las posibles fuentes de error y su magnitud.

## PROBLEMAS RESUELTOS

### MOVIMIENTOS CARACTERÍSTICOS DE SERIES EN EL TIEMPO

- 18.1. ¿Con qué movimientos característicos de una serie en el tiempo asociaría principalmente (a) un incendio en una fábrica que retrasa 3 semanas su producción, (b) una época de prosperidad, (c) las ventas prenavideñas en un establecimiento, (d) la necesidad de aumentar la producción de trigo a causa de un constante crecimiento de la población y (e) la lluvia caída mensualmente sobre una ciudad en un periodo de 5 años?

#### Solución

Los movimientos característicos son (a) irregular (b) cíclico, (c) estacional, (d) a largo término y (e) estacional.

### PROMEDIOS MÓVILES; SUAVIZACIÓN DE SERIES EN EL TIEMPO

- 18.2. La Tabla 18.2 muestra la población agricultora (en millones) en EE.UU. durante los años 1973-1983. Construir (a) un promedio móvil de 5 años y (b) un promedio móvil de 4 años.

Tabla 18.1

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Población agricultora (millones)	9.47	9.26	8.86	8.25	7.81	8.01	7.55	7.24	7.01	6.88	7.03

Fuente: U.S. Department of Agriculture.

### Solución

- (a) Referimos a la Tabla 18.2. En la columna 3 el primer total móvil, 43.65, es la suma de las entradas primera a quinta de la columna 2; el segundo total móvil, 42.19, es la suma de la segunda a sexta entradas de la columna 2; etc.

En la práctica, tras obtener el primer total móvil (43.65), podemos obtener fácilmente el segundo restando de él 9.47 (la primera entrada de la columna 2) y sumando 8.01 (la sexta entrada de la columna 2), con lo que se llega a 42.19. Los sucesivos totales móviles se hallan del mismo modo.

Dividiendo cada total móvil por 5 se obtiene el promedio móvil requerido (columna 4).

- (b) Referimos a la Tabla 18.3. Los totales móviles de 4 años se hallan como en la parte (a), excepto que ahora se suman sólo cuatro entradas de la columna 2. Nótese que, a diferencia del método de la parte (a), los totales móviles están centrados *entre* años sucesivos. Este es siempre el caso cuando se toma el promedio móvil sobre un número *par* de años. Así, si consideramos que 1974 significa el 1 de julio de 1974, entonces el total móvil de los cuatro primeros años está centrado en el 1 de enero de 1975, o el 31 de diciembre de 1974.

Los promedios móviles de 4 años se obtienen dividiendo los totales móviles de 4 años por 4.

18.3. Construir un promedio móvil centrado de 4 años para los datos del Problema 18.2.

Tabla 18.2

Año	Datos	Total móvil de 5 años	Promedio móvil de 5 años
1973	9.47		
1974	9.26		
1975	8.86	43.65	8.73
1976	8.25	42.19	8.44
1977	7.81	40.48	8.10
1978	8.01	38.86	7.77
1979	7.55	37.62	7.52
1980	7.24	36.69	7.34
1981	7.01	35.71	7.14
1982	6.88		
1983	7.03		

Tabla 18.3

Año	Datos	Total móvil de 4 años	Promedio móvil de 4 años
1973	9.47		
1974	9.26		
1975	8.86	35.84	8.96
1976	8.25	34.18	8.55
1977	7.81	32.93	8.23
1978	8.01	31.62	7.91
1979	7.55	30.61	7.65
1980	7.24	29.81	7.45
1981	7.01	28.68	7.17
1982	6.88	28.16	7.04
1983	7.03		

### Solución

#### Primer método

Primero calculamos un promedio móvil de 4 años, como en el Problema 18.2(b); estos valores están centrados entre años sucesivos, como muestra la Tabla 18.4. Si ahora calculamos un total móvil

de 2 años para esos promedios móviles de 4 años, los resultados están centrados en los años requeridos. Dividiendo los resultados de la columna 4 por 2 obtenemos el promedio móvil *centrado* requerido (columna 5).

Tabla 18.4

Año	Datos	Promedio móvil de 4 años	Total móvil de 2 años para la columna 3	Promedio móvil centrado de 4 años (Columnas 4 $\div$ 2)
1973	9.47			
1974	9.26			
1975	8.86	8.96	17.51	8.76
1976	8.25	8.55	16.78	8.39
1977	7.81	8.23	16.14	8.07
1978	8.01	7.91	15.56	7.78
1979	7.55	7.65	15.10	7.55
1980	7.24	7.45	14.62	7.31
1981	7.01	7.17	14.21	7.11
1982	6.88	7.04		
1983	7.03			

### Segundo método

Primero calculamos un promedio móvil de 4 años, como en el Problema 18.2(b); estos valores están centrados entre años sucesivos, como muestra la Tabla 18.5. Si ahora calculamos un total móvil de 2 años para esos promedios móviles de 4 años, los resultados están centrados en los años requeridos. Dividiendo los resultados de la columna 4 por 8 ( $2 \times 4$ ) obtenemos el promedio móvil *centrado* requerido. Para el año 1975, la ligera diferencia entre 8.76 y 8.75 en las Tablas 18.4 y 18.5 se debe a errores de redondeo.

Tabla 18.5

Año	Datos	Total móvil de 4 años	Total móvil de 2 años para la columna 3	Promedio móvil centrado de 4 años (Columnas 4 $\div$ 8)
1973	9.47			
1974	9.26			
1975	8.86	35.84	70.02	8.75
1976	8.25	34.18	67.11	8.39
1977	7.81	32.93	64.55	8.07
1978	8.01	31.62	62.23	7.78
1979	7.55	30.61	60.42	7.55
1980	7.24	29.81	58.49	7.31
1981	7.01	28.68	56.84	7.11
1982	6.88	28.16		
1983	7.03			

18.4. Probar que el promedio móvil centrado de 4 años del Problema 18.3 es equivalente a un promedio móvil ponderado de 5 años con pesos 1, 2, 2, 2 y 1, respectivamente.

**Solución**

Denotemos por  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{11}$  los valores correspondientes a los años 1973, 1974, ..., 1983, respectivamente. Entonces, procediendo como en el segundo método del Problema 18.3, obtenemos la Tabla 18.6, de cuya columna de la derecha vemos que el promedio móvil centrado de 4 años es un promedio móvil ponderado de 5 años con pesos 1, 2, 2, 2 y 1, respectivamente. Nótese que la suma de esos pesos es  $1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$ .

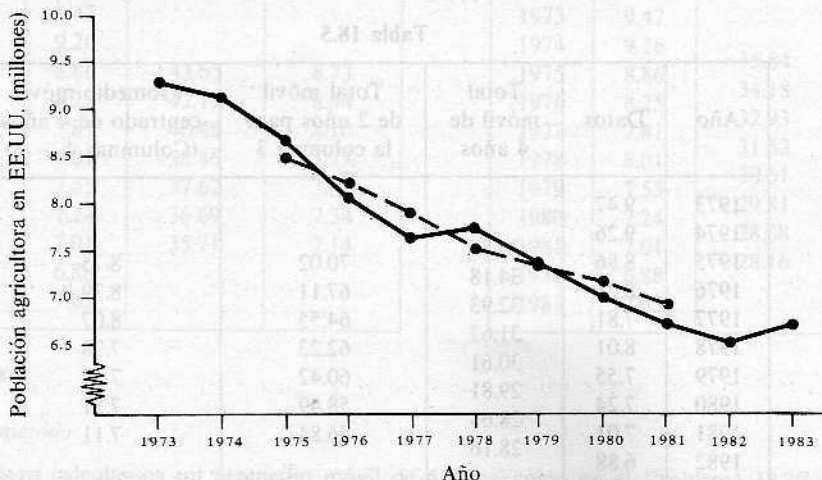
Este método se puede utilizar para llegar a los resultados del Problema 18.3. Por ejemplo, la primera entrada (correspondiente a 1975) es

$$\frac{(1)(9.47) + 2(9.26) + 2(8.86) + 2(8.25) + 1(7.81)}{8} = 8.75$$

**Tabla 18.6**

Año	Y	Total móvil de 4 años	Total móvil de 2 años para la columna 3	Promedio móvil centrado de 4 años (Columnas 4 ÷ 8)
1948	$Y_1$			
1949	$Y_2$			
1950	$Y_3$	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5$	$\frac{1}{8}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5)$
1951	$Y_4$	$Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$	$Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6$	$\frac{1}{8}(Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + Y_6)$
1952	$Y_5$	$Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$	$Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6 + Y_7$	$\frac{1}{8}(Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6 + Y_7)$
1953	$Y_6$	$Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7$		
...	...	.....	.....	.....
1958	$Y_{11}$			

18.5. Representar gráficamente el promedio móvil del Problema 18.2(a) y los datos originales (de la Tabla 18.1).



**Figura 18.3.**

**Solución**

El gráfico de los datos originales se indica con trazo continuo en la Figura 18.3, y el gráfico del promedio móvil se indica en trazo discontinuo. Observemos que el promedio móvil ha suavizado el gráfico de los datos originales, mostrando con nitidez la recta de tendencia.

Una desventaja del promedio móvil es que se pierden datos al comienzo y al final de la serie en el tiempo, lo cual puede ser grave si se dispone de un número escaso de datos.

**ESTIMACION DE LA TENDENCIA**

- 18.6. Usando el método de los semipromedios, hallar los valores de tendencia para los datos del Problema 18.2 tomando el promedio como (a) media y (b) mediana.

**Solución**

- (a) Dividimos los datos en dos partes iguales (omitiendo el año central, 1978), como muestra la Tabla 18.7. Entonces calculamos la media para los datos de cada parte. De los resultados obtenidos se deduce que en 6 años (1975-1981) ha habido un *decrecimiento* de  $8.73 - 7.14 = 1.59$  millones, con un decrecimiento de  $1.59/6 = 0.265$  anual. Sabiendo esto, podemos calcular los valores de tendencia. Así pues, los valores de tendencia para 1976 y 1977 son, respectivamente,  $8.73 - 0.265 = 8.47$  y  $8.73 - 2(0.265) = 8.20$ ; los valores de tendencia para 1974 y 1973 son, respectivamente,  $8.73 + 0.265 = 9.00$  y  $8.73 + 2(0.265) = 9.26$ ; etc. como recoge la Tabla 18.8.

Los resultados se pueden obtener también dibujando el gráfico de una recta que conecte los puntos (1975, 8.73) y (1981, 7.14) y leyendo los valores de tendencia de ese gráfico.

**Tabla 18.7**

1973	9.47	1979	7.55
1974	9.26	1980	7.24
1975	8.86	1981	7.01
1976	8.25	1982	6.88
1977	7.81	1983	7.03
Total	43.65	Total	35.71

Media =  $43.65/5 = 8.73$   
(correspondiente a 1975)

Media =  $35.71/5 = 7.14$   
(correspondiente a 1981)

**Tabla 18.8**

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Valor de tendencia	9.26	9.00	8.73	8.47	8.20	7.94	7.67	7.41	7.14	6.88	6.61

- (b) Las medianas de las dos partes iguales en (a) son 8.86 y 7.03, respectivamente. Luego hay un decrecimiento de  $(8.86 - 7.03)/6 = 0.305$  al año, y los valores de tendencia se muestran en la Tabla 18.9.

Cuando se usan medianas, el método se suele llamar método de *semimedias*. Si no se especifica el tipo de promedio, se sobreentiende la media.



Tabla 18.10

Año	X	Y	X <sup>2</sup>	XY
1973	-5	9.47	25	-47.35
1974	-4	9.26	16	-37.04
1975	-3	8.86	9	-26.58
1976	-2	8.25	4	-16.50
1977	-1	7.81	1	-7.81
1978	0	8.01	0	0
1979	1	7.55	1	7.55
1980	2	7.24	4	14.48
1981	3	7.01	9	21.03
1982	4	6.88	16	27.52
1983	5	7.03	25	35.15
		$\sum Y = 87.37$	$\sum X^2 = 110$	$\sum XY = -29.55$

Tabla 18.11

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Valor de tendencia	9.28	9.01	8.74	8.47	8.20	7.93	7.66	7.39	7.12	6.85	6.58

Tabla 18.12

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976	178.2	156.7	164.2	153.2	157.5	172.6	185.9	185.8	165.0	163.6	169.0	183.1
1977	196.3	162.8	168.6	156.9	168.2	180.2	197.9	195.9	176.0	166.4	166.3	183.9
1978	197.3	173.7	173.2	159.7	175.2	187.4	202.6	205.6	185.6	175.6	176.3	191.7
1979	209.5	186.3	183.0	169.5	178.2	186.7	202.4	204.9	180.6	179.8	177.4	188.9
1980	200.0	188.7	187.5	168.6	175.7	189.4	216.1	215.4	191.5	178.5	178.6	195.6
1981	205.2	179.6	185.4	172.4	177.7	202.7	220.2	210.2	186.9	181.4	175.6	195.6

Fuente: Survey of Current Business.

### Solución

- (a) Véase la Figura 18.4.
- (b) La Tabla 18.13 muestra los promedios (medias) totales y mensuales para 1976-1981. Dividiendo los datos mensuales de la Tabla 18.12 por los correspondientes promedios mensuales para cada año de la Tabla 18.13 y expresando el resultado como porcentaje, nos da las entradas de la Tabla 18.14; por ejemplo, la primera entrada viene dada por  $178.2/169.6 = 105.1\%$ . La fila de abajo en la Tabla 18.14 da el porcentaje medio para cada mes; como el total de esos porcentajes es 1200%, no es necesario ajustarlos, y en consecuencia los números de esa fila inferior representan el índice estacional pedido.

Este índice estacional muestra que, en promedio, la producción de energía eléctrica requerida

es mínima en abril y máxima en los meses de verano, julio y agosto (cuando el aire acondicionado provoca demanda extra). Las cifras de producción real para varias regiones del país ayudan a las compañías eléctricas a cubrir adecuadamente las necesidades de los usuarios.

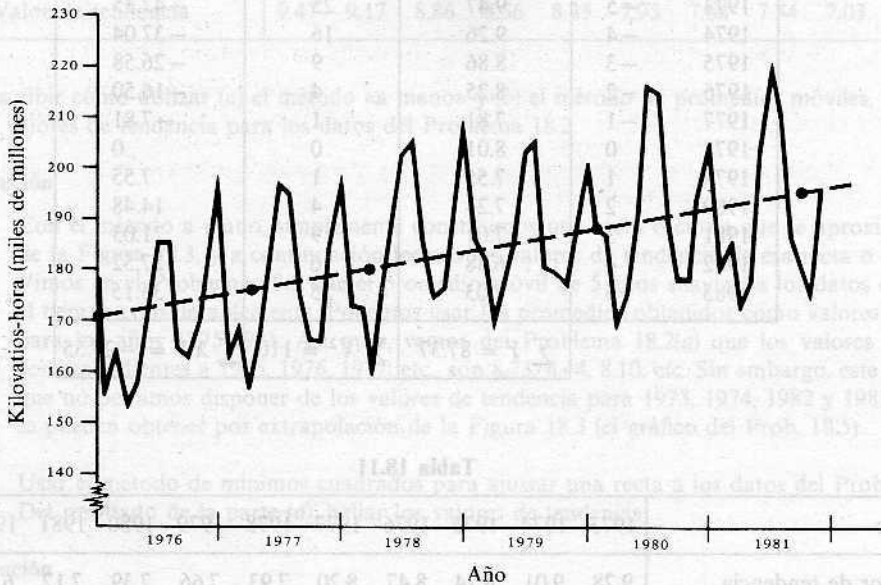


Figura 18.4. Producción de energía eléctrica no industrial en EE. UU., 1976-1981.

Tabla 18.13

Año	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Total	2034.8	2119.4	2203.9	2247.2	2285.6	2292.9
Promedio mensual	169.6	176.6	183.7	187.3	190.5	191.1

Tabla 18.14

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976	105.1	92.4	96.8	90.3	92.9	101.8	109.6	109.6	97.3	96.5	99.6	108.0
1977	111.2	92.2	95.5	88.8	95.2	102.0	112.1	110.9	99.7	94.2	94.2	104.1
1978	107.4	94.6	94.3	86.9	95.4	102.0	110.3	111.9	101.0	95.6	96.0	104.4
1979	111.9	99.5	97.7	90.5	95.1	99.7	108.1	109.4	96.4	96.0	94.7	100.9
1980	105.0	99.1	98.4	88.5	92.2	99.4	113.4	113.1	100.5	93.7	93.8	102.7
1981	107.4	94.0	97.0	90.2	93.0	106.1	115.2	110.0	97.8	94.9	91.9	102.4
Total	648.0	571.8	579.7	535.2	563.8	611.0	668.7	664.9	592.7	570.9	570.2	622.5
Media	108.0	95.3	96.6	89.2	94.0	101.8	111.5	110.8	98.8	95.2	95.0	103.8



**18.10.** Hallar el índice estacional para el Problema 18.9 usando la mediana en vez de la media.

**Solución**

Los números en la columna de enero de la Tabla 18.14, cuando se colocan por orden creciente de magnitud, son 105.0, 105.1, 107.4, 107.4, 111.2 y 111.9, luego la mediana es  $\frac{1}{2}(107.4 + 107.4) = 107.4$ . Las medianas para los otros meses se hallan del mismo modo y se recogen en la segunda fila de la Tabla 18.15. Como estas medianas suman 1198.2, las ajustamos multiplicando cada número por  $1200/1198.2$ . Eso produce los números de la tercera fila de la Tabla 18.15, que ya nos da el índice estacional buscado. Los resultados están en buen acuerdo con los obtenidos usando la media (Problema 18.9). En la práctica, siempre que los resultados con media y mediana difieren, se opta por usar la mediana para eliminar los valores extremos.

**Tabla 18.15**

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Mediana	107.4	94.3	96.9	90.0	94.0	101.9	111.2	110.5	98.8	95.3	94.5	103.4
Índice estacional	107.6	94.4	97.0	90.1	94.1	102.1	111.4	110.7	98.9	95.4	94.6	103.6

**18.11.** Hallar un índice estacional para los datos del Problema 18.9 usando el método del porcentaje de tendencia. Al aplicar este método, obténgase los valores de tendencia mensuales por mínimos cuadrados.

**Solución**

A la vista del gráfico de los datos reales (Fig. 18.4) se desprende que la tendencia a largo término se puede aproximar convenientemente por una recta. En vez de hallar esta recta a partir de los datos mensuales de la Tabla 18.12, la hallaremos de los promedios mensuales de los años 1976-1981, como muestra la Tabla 18.16 (que se ha tomado de la Tabla 18.13). Supongamos que las cifras mensuales de la Tabla 18.12 corresponden a la mitad del mes; así pues, los promedios de la Tabla 18.16 corresponden al 30 de junio o al 1 de julio del año en cuestión.

Como hay un número par de años, usamos el segundo método del Problema 13.20, de donde obtenemos la Tabla 18.17. La recta de mínimos cuadrados pedida es

$$Y = \bar{Y} + \left( \frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X = \frac{1098.8}{6} + \left( \frac{152.8}{70} \right) X = 183.13 + 2.183X$$

**Tabla 18.16**

Año	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Promedio mensual	169.6	176.6	183.7	187.3	190.5	191.1

Tabla 18.17

Año	$X$	$Y$	$X^2$	$XY$
1976	-5	169.6	25	-848.0
1977	-3	176.6	9	-529.8
1978	-1	183.7	1	-183.7
1979	1	187.3	1	187.3
1980	3	190.5	9	571.5
1981	5	191.1	25	955.5
		$\sum Y = 1098.8$	$\sum X^2 = 70$	$\sum XY = 152.8$

donde  $X$  se mide en semestres y el origen es del 31 de diciembre de 1978 o el 1 de enero de 1979. De esta ecuación se deduce que los valores de  $Y$  crecen 2.183 cada semestre, o sea  $2.183/6 = 0.3638$  cada mes. Así pues, cuando  $X = 0$  (1 enero 1978),  $Y = 183.13$ . Medio mes después (15 enero 1978) el valor de  $Y$  es  $183.13 + \frac{1}{2}(0.3638) = 183.31$ . Añadiendo sucesivamente 0.3638 a 183.31, hallamos los valores de tendencia para febrero de 1978, marzo de 1978, etc., que son  $183.31 + 0.3638 = 183.7$ ,  $183.31 + 2(0.3638) = 184.0$ , etc. Análogamente, restando sucesivamente 0.3638 de 183.31, hallamos los valores de tendencia para diciembre de 1977, noviembre de 1977, etc., que son  $183.13 - 0.3638 = 182.8$ ,  $183.13 - 2(0.3638) = 182.4$ , etc. De esta manera obtenemos los valores de tendencia mensuales que se indican en la Tabla 18.18. La recta de mínimos cuadrados se muestra en trazo discontinuo en la Figura 18.4.

Tabla 18.18

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976	170.2	170.6	170.9	171.3	171.7	172.0	172.4	172.8	173.1	173.5	173.9	174.2
1977	174.6	174.9	175.3	175.7	176.0	176.4	176.8	177.1	177.5	177.9	178.2	178.6
1978	178.9	179.3	179.7	180.0	180.4	180.8	181.1	181.5	181.9	182.9	182.6	182.9
1979	183.3	183.7	184.0	184.4	184.8	185.1	185.5	185.9	186.2	186.6	186.9	187.3
1980	187.7	188.0	188.4	188.8	189.1	189.5	189.9	190.2	190.6	190.9	191.3	191.7
1981	192.0	192.4	192.8	193.1	193.5	193.9	194.2	194.6	195.0	195.3	195.7	196.0

Tabla 18.19

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976	104.7	91.9	96.1	89.4	91.7	100.3	107.8	107.5	95.3	94.3	97.2	105.1
1977	112.4	93.1	96.2	89.3	95.6	102.2	111.9	110.8	99.2	93.5	93.3	103.0
1978	110.3	96.9	96.4	88.7	97.1	103.7	111.9	113.3	102.0	96.4	96.5	104.8
1979	114.6	101.4	99.5	91.9	96.4	100.9	109.1	110.2	97.0	96.4	94.9	100.9
1980	106.6	100.4	99.7	89.4	92.9	99.9	113.8	113.2	100.5	93.5	93.4	102.0
1981	106.9	93.3	96.2	89.3	91.8	104.5	113.4	108.0	95.8	92.9	89.7	99.8
Media	109.3	96.2	97.4	89.7	94.3	101.9	111.3	110.5	98.3	94.5	94.2	102.6
Mediana	108.6	95.1	96.3	89.3	94.3	101.6	111.9	110.5	98.1	93.9	94.2	102.5
Mediana ajustada	108.9	95.4	96.6	89.6	94.6	101.9	112.2	110.8	98.4	94.2	94.5	102.8

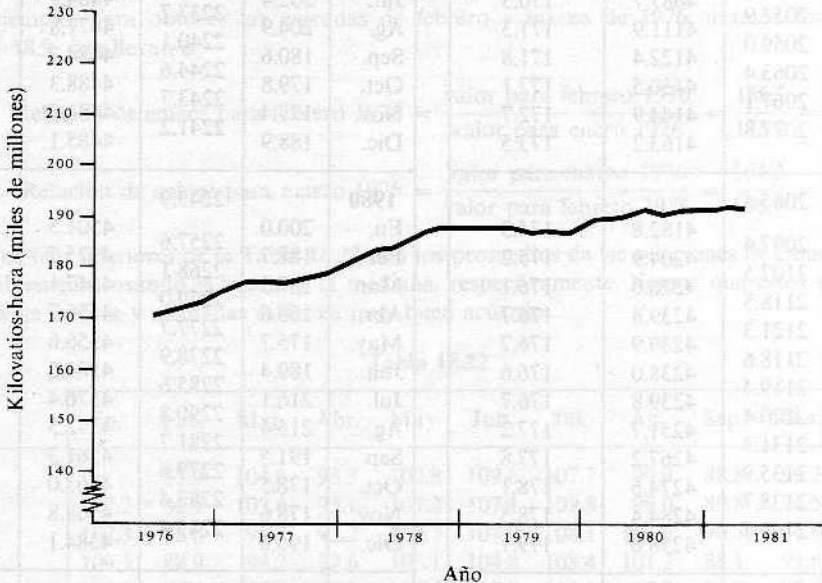
Ahora dividimos cada uno de los valores mensuales de la Tabla 18.12 por los correspondientes valores de tendencia en la Tabla 18.18. Los resultados, expresados en porcentajes, se recogen en la Tabla 18.19; por ejemplo, la primera entrada de la tabla viene dada por  $178.2/170.2 = 104.7\%$ .

Como el total de las medias en la Tabla 18.19 es 1200.2, que es muy próximo a 1200%, no es necesario ajustar; en consecuencia, la tercera fila por abajo de esa tabla representa el índice estacional determinado por la media. Ya que el total de las medianas es 1196.6, debemos ajustarlas; para ello, las multiplicamos por  $1200/1196.6$ , obteniendo así la fila de más abajo de la Tabla 18.19, que muestra el deseado índice estacional determinado esta vez por la mediana. Vemos que hay buen acuerdo entre las medias y las medianas ajustadas en la Tabla 18.19. Estos resultados coinciden asimismo con los de los Problemas 18.9(b) y 18.10.

- 18.12.** Obtener un índice estacional para los datos del Problema 18.9 usando el método del promedio móvil en porcentajes.

### Solución

Usando el segundo método del Problema 18.3, obtenemos primero un promedio móvil centrado de 12 meses, como muestra la Tabla 18.20. Estos resultados los recoge el gráfico de la Figura 18.5; nótese que el esquema estacional ha desaparecido, lo cual suaviza el gráfico considerablemente.



**Figura 18.5.** Promedio móvil centrado de 12 meses.

Ahora dividimos cada uno de los valores mensuales reales por el correspondiente promedio móvil centrado de 12 meses y expresamos cada resultado como porcentaje; para julio de 1976, por ejemplo, obtenemos  $185.9/170.3 = 109.2\%$ . Los resultados figuran en la Tabla 18.21. Obsérvese que las entradas de los 6 primeros meses de 1976 y los 6 últimos de 1981 no se obtienen por este método.

La Tabla 18.21 da el porcentaje promedio para cada mes en términos tanto de la media como de la mediana. Mientras las medias (que totalizan 1200.2) no han sido ajustadas, las medianas (que totalizan 1198.9) sí lo han sido. Así pues, la primera y tercera filas por abajo en la tabla representan los índices estacionales obtenidos usando la media y la mediana, respectivamente. Estos índices coinciden entre sí y con los obtenidos por otros métodos en problemas anteriores.

- 18.13.** Hallar un índice estacional para los datos del Problema 18.9 por medio del método de relación de enlace.

**Solución**

Expresamos primero los datos de cada mes como un porcentaje de los datos del mes anterior, como muestra la Tabla 18.22. Cada uno de estos porcentajes se llama *relación de enlace*.

**Tabla 18.20**

Año y mes	Datos	Total móvil de 12 meses	Total móvil de 2 meses para la columna 3	Promedio móvil centrado de 12 meses (Col. 4 ÷ 24)	Año y mes	Datos	Total móvil de 12 meses	Total móvil de 2 meses para la columna 3	Promedio móvil centrado de 12 meses (Col. 4 ÷ 24)
<b>1976</b>					<b>1979</b>		2250.6		
En.	178.2				En.	209.5		4501.0	187.5
Feb.	156.7				Feb.	186.3	2250.4	4500.1	187.5
Mar.	164.2				Mar.	183.0	2249.7	4494.4	187.3
Abr.	153.2				Abr.	169.5	2244.7	4493.6	187.2
May.	157.5				May.	178.2	2248.9	4498.9	187.5
Jun.	172.6	2034.8			Jun.	186.7	2250.0	4497.2	187.4
Jul.	185.9	2052.9	4087.7	170.3	Jul.	202.4	2247.2	4484.9	186.9
Ag.	185.8	2059.0	4111.9	171.3	Ag.	204.9	2237.7	4477.8	186.6
Sep.	165.0	2063.4	4122.4	171.8	Sep.	180.6	2240.1	4484.7	186.9
Oct.	163.6	2067.1	4130.5	172.1	Oct.	179.8	2244.6	4488.3	187.0
Nov.	169.0	2077.8	4144.9	172.7	Nov.	177.4	2243.7	4484.9	186.9
Dic.	183.1		4163.2	173.5	Dic.	188.9	2241.2	4485.1	186.9
<b>1977</b>		2085.4			<b>1980</b>		2243.9		
En.	196.3	2097.4	4182.8	174.3	En.	200.0	2257.6	4501.5	187.6
Feb.	162.8	2107.5	4204.9	175.2	Feb.	188.7	2268.1	4525.7	188.6
Mar.	168.6	2118.5	4226.0	176.1	Mar.	187.5	2279.0	4547.1	189.5
Abr.	156.9	2121.3	4239.8	176.7	Abr.	168.6	2277.7	4556.7	189.9
May.	168.2	2118.6	4239.9	176.7	May.	175.7	2278.9	4556.6	189.9
Jun.	180.2	2119.4	4238.0	176.6	Jun.	189.4	2285.6	4564.5	190.2
Jul.	197.9	2120.4	4239.8	176.7	Jul.	216.1	2290.8	4576.4	190.7
Ag.	195.9	2131.3	4251.7	177.2	Ag.	215.4	2281.7	4572.5	190.5
Sep.	176.0	2135.9	4267.2	177.8	Sep.	191.5	2279.6	4561.3	190.1
Oct.	166.4	2138.7	4274.6	178.1	Oct.	178.5	2283.4	4563.0	190.1
Nov.	166.3	2145.7	4284.4	178.5	Nov.	178.6	2285.4	4568.8	190.4
Dic.	183.9		4298.6	179.1	Dic.	195.6		4584.1	191.0
<b>1978</b>		2152.9			<b>1981</b>		2298.7		
En.	197.3	2157.6	4310.5	179.6	En.	205.2	2302.8	4601.5	191.7
Feb.	173.7	2167.3	4324.9	180.2	Feb.	179.6	2297.6	4600.4	191.7
Mar.	173.2	2176.9	4344.2	181.0	Mar.	185.4	2293.0	4590.6	191.3
Abr.	159.7	2186.1	4363.0	181.8	Abr.	172.4	2295.9	4588.9	191.2
May.	175.2	2196.1	4382.2	182.6	May.	177.7	2292.9	4588.8	191.2
Jun.	187.4	2203.9	4400.0	183.3	Jun.	202.7	2292.9	4585.8	191.1
Jul.	202.6	2216.1	4420.0	184.2	Jul.	202.2			
Ag.	205.6	2228.7	4444.8	185.2	Ag.	210.2			
Sep.	185.6	2238.5	4467.2	186.1	Sep.	186.9			
Oct.	175.6	2248.3	4486.8	187.0	Oct.	181.4			
Nov.	176.3	2251.3	4499.6	187.5	Nov.	175.6			
Dic.	191.7		4501.9	187.6	Dic.	195.6			

Tabla 18.21

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976							109.2	108.5	96.0	95.1	97.9	105.5
1977	112.6	92.9	95.7	88.8	95.2	102.0	112.0	110.6	99.0	93.4	93.2	102.7
1978	109.9	96.4	95.7	87.8	95.9	102.2	110.0	111.0	99.7	93.9	94.0	102.2
1979	111.7	99.4	97.7	90.5	95.0	99.6	108.3	109.8	96.6	96.1	94.9	101.1
1980	106.6	100.1	98.9	88.8	92.5	99.6	113.3	113.1	100.7	93.9	93.8	102.4
1981	107.0	93.7	96.9	90.2	92.9	106.1						
Media	109.6	96.5	97.0	89.2	94.3	101.9	110.6	110.6	98.4	94.5	94.8	102.8
Mediana	109.9	96.4	96.9	88.8	95.0	102.0	110.0	110.6	99.0	93.9	94.0	102.4
Media ajustada	110.0	96.5	97.0	88.9	95.1	102.1	110.1	110.7	99.1	94.0	94.1	102.5

Por ejemplo, para obtener las entradas de febrero y marzo de 1976, usamos los datos del Problema 18.9, que llevan a

$$\text{Relación de enlace para febrero 1976} = \frac{\text{valor para febrero 1976}}{\text{valor para enero 1976}} = \frac{156.7}{178.2} = 87.9\%$$

$$\text{Relación de enlace para marzo 1976} = \frac{\text{valor para marzo 1976}}{\text{valor para febrero 1976}} = \frac{164.2}{156.7} = 104.8\%$$

Las dos filas inferiores de la Tabla 18.22 dan los promedios de las relaciones de enlace para cada mes que obtenemos usando la media y la mediana, respectivamente. Vemos que estos resultados procedentes de medias y medianas están en muy buen acuerdo.

Tabla 18.22

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976		87.9	104.8	93.3	102.8	109.6	107.7	99.9	88.8	99.2	103.3	108.3
1977	107.2	82.9	103.6	93.1	107.2	107.1	109.8	99.0	89.8	94.5	99.9	110.6
1978	107.3	88.0	99.7	92.2	109.7	107.0	108.1	101.5	90.3	94.6	100.4	108.7
1979	109.3	88.9	98.2	92.6	105.1	104.8	108.4	101.2	88.1	99.6	98.7	106.5
1980	105.9	94.4	99.4	89.9	104.2	107.8	114.1	99.7	88.9	93.2	100.1	109.5
1981	104.9	87.5	103.2	93.0	103.1	114.1	108.6	95.5	88.9	97.1	96.8	111.4
Media	106.9	88.3	101.5	92.4	105.4	108.4	109.5	99.5	89.1	96.4	99.9	109.2
Mediana	107.2	88.0	101.5	92.8	104.7	107.5	108.5	99.8	88.9	95.9	100.0	109.1

Consideremos el de enero como valor 100% (véase Tabla 18.23). Como la relación de enlace promedio para febrero es 88.0 (usando el valor de la mediana en la Tabla 18.23), los datos para febrero son, en promedio, el 88.0% de los datos de enero (o sea, 88.0% de 100.0 = 88.0); análogamente, la relación de enlace promedio para marzo es 101.5% del de febrero (o sea, 101.5% de 88.0 = 89.3); etc. Continuando de este modo llegamos a la Tabla 18.23, cuyas entradas se llaman a veces *relaciones en cadena*.

En el lado derecho de la Tabla 18.23, el resultado para el segundo enero es 100.7, un crecimiento de 0.7 sobre el primer enero. Este crecimiento se debe a la tendencia a largo plazo en los datos. Con el fin de ajustar a dicha tendencia, hemos de restar  $(12/12)(0.7) = .0.7$  del 100.7 del segundo enero (para lograr 100.0), restar  $(11/12)(0.7) = 0.64$  del valor de diciembre,  $(10/12)(0.7) = 0.58$  del de noviembre, etc. Los valores ajustados a la tendencia se muestran en la Tabla 18.24. [Estrictamente hablando, habría que *multiplicar* las entradas de derecha a izquierda, respectivamente, por  $(100.0/100.7)^{12/12}$ ,  $(100.0/100.7)^{11/12}$ ,  $(100.0/100.7)^{10/12}$ , etc. esto, sin embargo, conduce prácticamente a los mismos resultados que los de la Tabla 18.24.] Como los porcentajes de la Tabla 18.24 suman 1094.5 en total, los ajustamos multiplicando cada porcentaje por  $1200/1094.5$ , con lo que ya se obtiene el índice estacional recogido en la Tabla 18.25.

Tabla 18.23

En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	En.
100.0	88.0	89.3	82.9	86.8	93.3	101.2	101.0	89.8	86.1	86.1	93.9	100.7

Tabla 18.24

En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
100.0	87.9	89.2	82.7	86.6	93.0	100.8	100.6	89.3	85.6	85.5	93.3

Tabla 18.25

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Índice estacional	109.6	96.4	97.8	90.7	94.9	102.0	110.5	110.3	97.9	93.9	93.7	102.3

- 18.14.** Construir una tabla de comparación para los índices estacionales hallados por los diversos métodos de los Problemas 18.9, 18.11, 18.12 y 18.14.

#### Solución

Véase la Tabla 18.26 que muestra los índices estacionales obtenidos usando la mediana.

Tabla 18.26

Método	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Porcentaje promedio (Problema 18.9)	107.6	94.4	97.0	90.1	94.1	102.1	111.4	110.7	98.9	95.4	94.6	103.6
Relación con la tendencia (Problema 18.11)	108.9	95.4	96.6	89.6	94.6	101.9	112.2	110.8	98.4	94.2	94.5	102.8
Relación con el promedio anual (Problema 18.12)	110.0	96.5	97.0	88.9	95.1	102.1	110.1	110.7	99.1	94.0	94.1	102.5
Relación de enlace (Problema 18.13)	109.6	96.4	97.8	90.7	94.9	102.0	110.5	110.3	97.9	93.9	93.7	102.3

## DATOS AJUSTADOS A LA VARIACION ESTACIONAL

18.15. Ajustar los datos del Problema 18.9 a la variación estacional, es decir, desestacionalizar los datos.

**Solución**

Para ajustar los datos a la variación estacional, hemos de dividir todas las entradas en los datos originales del Problema 18.9 por el índice estacional del mes correspondiente, hallado por alguno de los métodos expuestos. Por ejemplo, si se usa el índice estacional del Problema 18.12, hay que dividir todos los valores de enero por 110.0% (o sea, 1.100), todos los valores de febrero por 96.5% (o sea, 0.965), etc. Los datos ajustados que resultan se recogen en la Tabla 18.27.

Tabla 18.27

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976	160.5	162.4	169.3	172.3	165.6	169.0	168.8	167.8	166.5	174.0	179.6	178.6
1977	178.5	168.7	173.8	176.5	176.9	176.5	179.7	177.0	177.6	177.0	176.7	179.4
1978	179.4	180.0	178.6	179.6	184.2	183.5	184.0	185.7	187.3	186.8	187.4	187.0
1979	190.5	193.1	188.7	190.7	187.4	182.9	183.8	185.1	182.2	191.3	188.5	184.3
1980	181.8	195.5	193.3	189.7	184.8	185.5	196.3	194.6	193.2	189.9	189.8	190.8
1981	186.5	186.1	191.1	193.9	186.9	198.5	200.0	189.9	188.6	193.0	186.6	190.8

18.16. (a) Representar en un gráfico los datos desestacionalizados del Problema 18.15.

(b) Comparar este gráfico con la Figura 18.4 del Problema 18.9(a).

**Solución**

(a) Véase Figura 18.6.

(b) El gráfico de los datos ajustados a la variación estacional muestra la tendencia a largo término, que, aparte sus fluctuaciones, se aproxima a una recta. Si denotamos los datos del Problema 18.9 por  $Y = TCSI$ , el gráfico de la Figura 18.6 es el de la variable  $Y/S = TCI$  en función del tiempo  $t$  y contiene la tendencia a largo término, los movimientos cíclicos y los irregulares. Como el gráfico indica una tendencia a largo término con escasa influencia de tipo cíclico e irregular, parece que el producto  $CI$  de los factores cíclico e irregular debe ser cercano al 100%. (El Problema 18.18 confirma esta sospecha.)

## ESTIMACION DE VARIACIONES CICLICAS E IRREGULARES

18.17. Ajustar los datos del Problema 18.16 a la tendencia.

**Solución**

Para eliminar la tendencia de los datos del Problema 18.16, dividimos cada entrada por el valor de tendencia mensual correspondiente, calculado por cualquiera de los métodos precedentes. Usemos los valores hallados en el Problema 18.12 por el método de promedios móviles. Los resultados se indican en la Tabla 18.28. Para obtener la entrada de julio de 1976, por ejemplo, dividimos la correspondiente entrada de la Tabla 18.27, que es 168.8, por el valor 170.3 (véase la primera entrada de la columna 5 en la Tabla 18.20), lo cual da  $168.8/170.3 = 99.1\%$ . Las entradas restantes se hallan de forma similar. Una desventaja de este método, y de cuantos métodos manejan promedios móviles, es que los datos de los extremos de la serie en el tiempo se pierden.

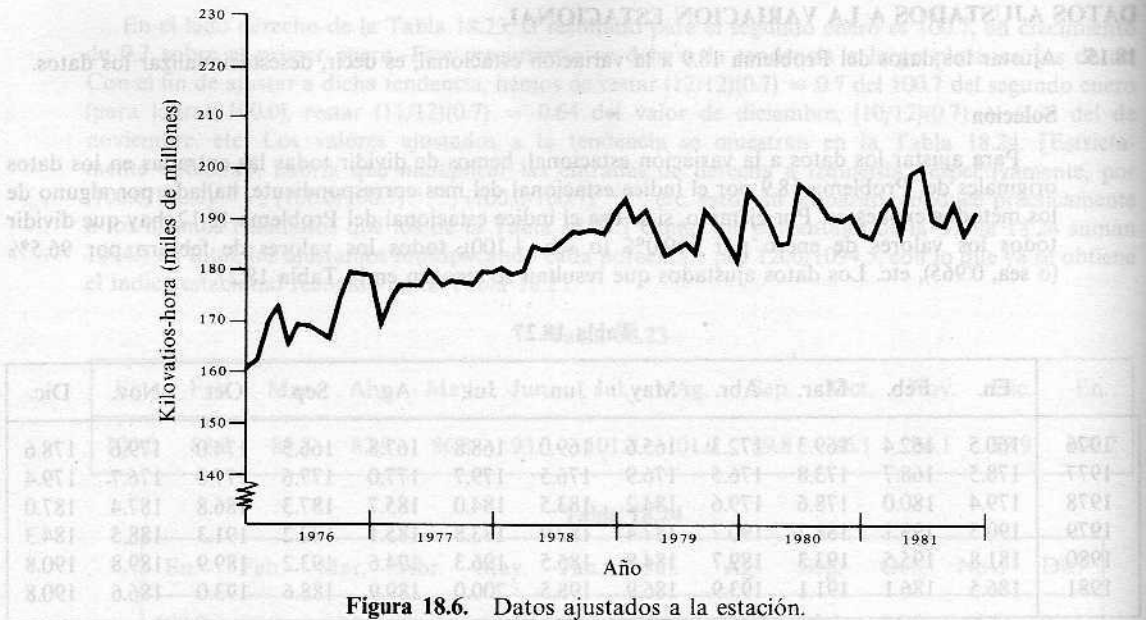


Figura 18.6. Datos ajustados a la estación.

- 18.18. (a) Representar en un gráfico los datos obtenidos en el Problema 18.17.  
 (b) Explicar el significado de ese gráfico.

**Solución**

- (a) Conviene restar 100(%) de los datos del Problema 18.17 y hacer el gráfico de las desviaciones resultantes. Este gráfico, en una escala vertical muy aumentada, se puede ver en la Figura 18.7.  
 (b) Los datos originales se representan por  $Y = TCSI$ . Ajustando a la variación estacional (como en el Prob. 18.15) mediante división de ambos lados por el índice estacional  $S$ , se obtiene  $Y/S = TCI$ . El ajuste subsiguiente a la tendencia exige dividir por  $T$ , con lo que se obtiene  $Y/ST = CI$ . Restando 100(%) queda  $(Y/ST) - 100 = CI - 100$ . Así pues, la variable dependiente en la Figura 18.7 es  $(Y/ST) - 100$ , y la independiente es el tiempo  $t$ .

El gráfico de la Figura 18.7 consta teóricamente sólo de los movimientos cíclicos e irregulares  $C$  e  $I$ . Nótese que el producto  $CI$  varía entre 96% y 104%, confirmando la conclusión a la que habíamos llegado en el Problema 18.16(b).

Tabla 18.28

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1976							99.1	98.0	96.9	101.1	104.0	102.9
1977	102.4	96.3	98.7	99.9	100.1	100.0	101.7	99.9	99.9	99.4	99.0	100.2
1978	99.9	99.9	98.7	98.8	100.9	100.1	99.9	100.3	100.6	99.6	99.9	99.7
1979	101.6	103.0	100.7	101.9	99.9	97.6	98.3	99.2	97.5	102.3	100.9	98.6
1980	96.9	103.7	102.0	99.9	97.3	97.5	102.9	102.2	101.6	99.9	99.7	99.9
1981	97.3	97.1	99.9	101.4	97.8	103.9						



- 18.19. (a) Hallar los promedios móviles de 3 y 7 meses para los datos del Problema 18.17.  
 (b) Construir los gráficos de los promedios móviles de la parte (a).  
 (c) Interpretar los gráficos.

**Solución**

- (a) Los promedios móviles pedidos se muestran en la Tabla 18.29.  
 (b) Los gráficos de los promedios móviles de 3 y 7 meses pueden verse en las Figuras 18.8 y 18.9, respectivamente.

**Tabla 18.29**

Año y mes	Datos	Total móvil de 3 meses	Promedio móvil de 3 meses	Total móvil de 7 meses	Promedio móvil de 7 meses
<b>1976</b>					
Jul.	91.1				
Ag.	98.0	294.0	98.0		
Sep.	96.9	296.0	98.7		
Oct.	101.1	302.0	100.7	704.4	100.6
Nov.	104.0	308.0	102.7	701.6	100.2
Dic.	102.9	309.3	103.1	702.3	100.3
<b>1977</b>					
En.	102.4	301.6	100.5	705.3	100.8
Feb.	96.3	297.4	99.1	704.3	100.6
Mar.	98.7	294.9	98.3	700.3	100.0
Abr.	99.9	298.7	99.6	699.1	99.9
May.	100.1	300.0	100.0	704.7	100.7
Jun.	100.0	301.8	100.6	700.2	100.0
Jul.	101.7	301.6	100.5	700.9	100.1
Ag.	99.9	301.5	100.5	700.0	100.0
Sep.	99.9	299.2	99.7	700.1	100.0
Oct.	99.4	298.3	99.4	700.0	100.0
Nov.	99.0	298.6	99.5	698.2	99.7
Dic.	100.2	299.1	99.7	697.0	99.6
<b>1978</b>					
En.	99.9	300.0	100.0	695.9	99.4
Feb.	99.9	298.5	99.5	697.4	99.6
Mar.	98.7	297.4	99.1	698.5	99.8
Abr.	98.8	298.4	99.5	698.2	99.7
May.	100.9	299.8	99.9	698.6	99.8
Jun.	100.1	300.9	100.3	699.3	99.9
Jul.	99.9	300.3	100.1	700.5	100.1
Ag.	100.3	300.8	100.3	701.6	100.2
Sep.	100.6	300.8	100.3	700.4	100.1
Oct.	99.9	300.4	100.1	701.9	100.3
Nov.	99.9	299.5	99.8	705.0	100.7
Dic.	99.7	301.2	100.4	705.4	100.8

Tabla 18.29. (Continuación)

Año y mes	Datos	Total móvil de 3 meses	Promedio móvil de 3 meses	Total móvil de 7 meses	Promedio móvil de 7 meses
<b>1979</b>					
En.	101.6	304.3	101.4	706.7	101.0
Feb.	103.0	305.3	101.8	706.7	101.0
Mar.	100.7	305.6	101.9	704.4	100.6
Abr.	101.9	302.5	100.8	703.0	100.4
May.	99.9	299.4	99.8	700.6	100.1
Jun.	97.6	295.8	98.6	695.1	99.3
Jul.	98.3	295.1	98.4	696.7	99.5
Ag.	99.2	295.0	98.3	695.7	99.4
Sep.	97.5	299.0	99.7	694.4	99.2
Oct.	102.3	300.7	100.2	693.7	99.1
Nov.	100.9	301.8	100.6	699.1	99.9
Dic.	98.6	296.4	98.8	701.9	100.3
<b>1980</b>					
En.	96.9	299.2	99.7	704.3	100.6
Feb.	103.7	302.6	100.9	699.3	99.9
Mar.	102.0	305.6	101.9	695.9	99.4
Abr.	99.9	299.2	99.7	700.2	100.0
May.	97.3	294.7	98.2	705.5	100.8
Jun.	97.5	297.7	99.2	703.4	100.5
Jul.	102.9	302.6	100.9	701.3	100.2
Ag.	102.2	306.7	102.2	701.1	100.2
Sep.	101.6	303.7	101.2	703.7	100.5
Oct.	99.9	301.2	100.4	703.5	100.5
Nov.	99.7	299.5	99.8	697.7	99.7
Dic.	99.9	296.9	99.0	695.4	99.3
<b>1981</b>					
En.	97.3	294.3	98.1	695.2	99.3
Feb.	97.1	294.3	98.1	693.1	99.0
Mar.	99.9	298.4	99.5	696.8	99.5
Abr.	101.4	299.1	99.7		
May.	97.8	303.1	101.0		
Jun.	103.9				

- (c) Tal como era de esperar, los promedios móviles sirven para suavizar las irregularidades de los datos del Problema 18.17, como se ve sin más que comparar las Figuras 18.8 y 18.9 con la Figura 18.7. Es claro además de los gráficos que el promedio móvil de 7 meses proporciona un mejor suavizamiento de los datos en este caso que el de 3 meses. Todas las fluctuaciones para el promedio móvil de 3 meses son menores que un 3% aproximadamente, mientras que para el caso del de 7 meses están por debajo del 1%.

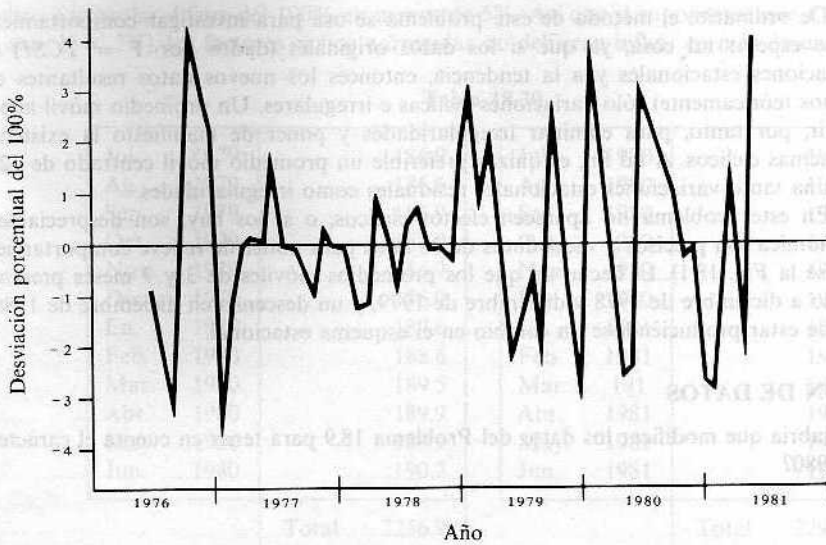


Figura 18.7. Variaciones cíclicas e irregulares.

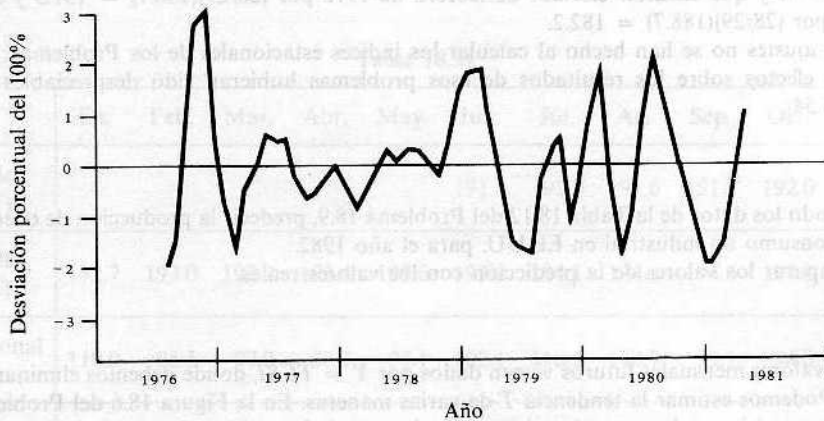


Figura 18.8. Promedio móvil de 3 meses.

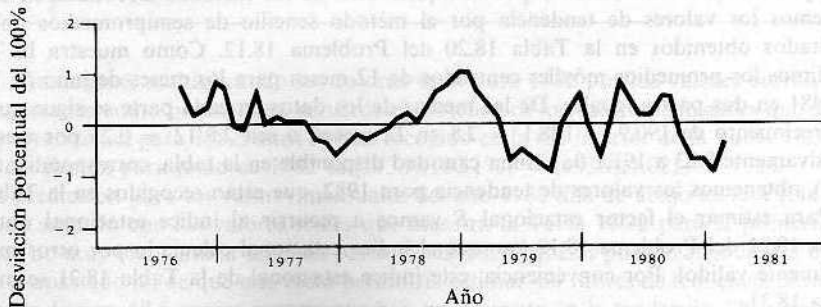


Figura 18.9. Promedio móvil de 7 meses.

De ordinario, el método de este problema se usa para investigar comportamientos cíclicos. Cabe esperar tal cosa, ya que si los datos originales (dados por  $Y = TCSI$ ) se ajustan a variaciones estacionales y a la tendencia, entonces los nuevos datos resultantes contienen (al menos teóricamente) sólo variaciones cíclicas e irregulares. Un promedio móvil adecuado puede servir, por tanto, para eliminar irregularidades y poner de manifiesto la existencia o no de esquemas cíclicos. A tal fin, es quizás preferible un promedio móvil centrado de 12 meses, pues elimina tanto variaciones estacionales residuales como irregularidades.

En este problema no aparecen efectos cíclicos; o si los hay, son despreciables. En teoría económica son precisos a veces datos de 20 años para poner de relieve comportamientos cíclicos (véase la Fig. 18.1). El hecho de que los promedios móviles de 3 y 7 meses presenten picos en torno a diciembre de 1978 y diciembre de 1979, y un descenso en diciembre de 1980, indica que puede estar produciéndose un cambio en el esquema estacional.

## COMPARACION DE DATOS

- 18.20. ¿Cómo habría que modificar los datos del Problema 18.9 para tener en cuenta el carácter bisiesto de 1976 y 1980?

### Solución

En un año bisiesto, febrero tiene 29 días en vez de los 28 habituales. Para lograr la comparabilidad, debemos multiplicar los datos de un año bisiesto por  $28/29$ . Así pues, en la Tabla 18.12 del Problema 18.9 hay que sustituir el valor de febrero de 1976 por  $(28/29)(156.7) = 151.3$  y el de febrero de 1980 por  $(28/29)(188.7) = 182.2$ .

Estos ajustes no se han hecho al calcular los índices estacionales de los Problemas 18.9 a 18.13, pero sus efectos sobre los resultados de esos problemas hubieran sido despreciables (véase Problema 18.54).

## PREDICCION

- 18.21. (a) Usando los datos de la Tabla 18.12 del Problema 18.9, predecir la producción de energía eléctrica de consumo no industrial en EE.UU. para el año 1982.  
(b) Comparar los valores de la predicción con los valores reales.

### Solución

- (a) Los valores mensuales futuros vienen dados por  $Y = TCSI$ , donde debemos eliminar  $T$ ,  $C$ ,  $S$  e  $I$ .

Podemos estimar la tendencia  $T$  de varias maneras. En la Figura 18.6 del Problema 18.16 se ve que podríamos lograr estimaciones muy buenas de los valores de tendencia futuros ajustando una recta a los valores de tendencia de los dos últimos años, por ejemplo. Podríamos hacer tal cosa por mínimos cuadrados o por cualquier otro de los métodos discutidos en este capítulo. Hallemos los valores de tendencia por el método sencillo de semipromedios aplicado a los resultados obtenidos en la Tabla 18.20 del Problema 18.12. Como muestra la Tabla 18.30, dividimos los promedios móviles centrados de 12 meses para los meses de julio de 1979 a junio de 1981 en dos partes iguales. De las medias de los datos en cada parte se sigue que ha habido un crecimiento de  $190.9 - 188.1 = 2.8$  en 12 meses, o sea  $2.8/12 = 0.23$  por mes; añadiendo sucesivamente 0.23 a 191.1 (la última cantidad disponible en la tabla, correspondiente a junio de 1981), obtenemos los valores de tendencia para 1982, que están recogidos en la Tabla 18.31.

Para estimar el factor estacional  $S$  vamos a recurrir al índice estacional obtenido en la Tabla 18.21 del Problema 18.12 (aunque el índice estacional calculado por otros métodos sería igualmente válido). Por conveniencia, este índice estacional de la Tabla 18.21 se muestra en la Tabla 18.31.

Vemos de la Figura 18.8 del Problema 18.19 que el producto estimado  $CI$  de los factores

cíclico e irregular difiere del 100% en menos de 5%. Así que si suponemos que  $CI = 100\% = 1$  (o sea,  $Y = TS$ ), los factores cíclico e irregular no debieran influir en más de un 5% en  $Y$ .

Tabla 18.30

Jul. 1979	186.9	Jul. 1980	190.7
Ag. 1979	186.6	Ag. 1980	190.5
Sep. 1979	186.9	Sep. 1980	190.1
Oct. 1979	187.0	Oct. 1980	190.1
Nov. 1979	186.9	Nov. 1980	190.4
Dic. 1979	186.9	Dic. 1980	191.0
En. 1980	187.6	En. 1981	191.7
Feb. 1980	188.6	Feb. 1981	191.7
Mar. 1980	189.5	Mar. 1981	191.3
Abr. 1980	189.9	Abr. 1981	191.2
May. 1980	189.9	May. 1981	191.2
Jun. 1980	190.2	Jun. 1981	191.1
Total 2256.9		Total 2291.0	
Media 188.1		Media 190.9	

Tabla 18.31

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1981 valor de tendencia ( $T$ )						191.1	191.3	191.6	191.8	192.0	192.3	192.5
1982 valor de tendencia ( $T$ )	192.7	193.0	193.2	193.4	193.6	193.9	194.1	194.3	194.6	194.8	195.0	195.2
Índice estacional ( $S\%$ )	110.0	96.5	97.0	88.9	95.1	102.1	110.1	110.7	99.1	94.0	94.1	102.5
Predicción de energía para 1982 ( $TS$ )	212.0	186.2	187.4	171.9	184.1	198.0	213.7	215.1	192.8	183.1	183.5	200.1

Finalmente, multiplicando los valores de  $T$  para 1982 por los valores correspondientes de  $S$  (expresados como porcentajes, recuérdese), obtenemos los valores mensuales que da la predicción, o *proyecciones*, para 1982; estos se han recogido en la fila inferior de la Tabla 18.31. Por ejemplo, la predicción para junio de 1982 es  $(193.9)(102.1\%) = (193.9)(1.021) = 198.0$

- (b) La predicción para los valores mensuales del año 1982 (fila de abajo en la Tabla 18.31) están en buen acuerdo con los valores reales que muestra la Tabla 18.32 para la primera parte de 1982, pero no muy bien para la segunda parte. Estas discrepancias pueden atribuirse a nuestra hipótesis en el apartado (a) de que una recta permitiría estimar los valores de tendencia para 1982, mientras que la Figura 18.5 parece sugerir que hay un descenso en la tendencia. Otra potencial fuente de error es un posible cambio en el esquema estacional (véase la nota al final del Prob. 18.19).

Tabla 18.32

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1982 energía real	210.1	180.3	187.7	172.6	177.1	186.1	210.6	205.7	180.7	173.0	173.4	184.7

Fuente: Survey of Current Business.

Podemos mejorar la precisión de la predicción usando una *parábola de mínimos cuadrados* (véanse Probs. 18.40 y 18.67) para ajustar los promedios mensuales en la Tabla 18.13 del Problema 18.9. La Tabla 18.33 presenta los valores de predicción obtenidos mediante una parábola de mínimos cuadrados y también los valores reales para 1982. Los resultados son mejores que los dados en la Tabla 18.31, ya que como enseña la fila inferior de la Tabla 18.33, los errores no superan, en porcentaje, el 5%.

Tabla 18.33

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1982 potencia real	210.1	180.3	187.7	172.6	177.1	186.1	210.6	205.7	180.7	173.0	173.4	184.7
1982 predicción de potencia	210.1	184.3	185.0	169.6	181.3	194.5	209.6	210.6	188.4	178.2	178.3	194.0
Porcentaje de error	0.0%	2.2%	1.4%	1.7%	2.4%	4.5%	0.5%	2.4%	4.3%	3.2%	3.0%	5.0%

## PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

### MOVIMIENTOS CARACTERISTICOS DE SERIES EN EL TIEMPO

- 18.22.** ¿Con qué movimientos característicos de una serie en el tiempo están asociados (a) una recesión, (b) un decrecimiento estival del paro, (c) el descenso de la mortalidad debido a los avances de la Medicina, (d) una huelga en la metalurgia y (e) una demanda continuamente creciente de automóviles utilitarios?

### PROMEDIOS MOVILES

- 18.23.** Dados los números 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0 y 1, determinar un promedio móvil de orden (a) 2, (b) 3, (c) 4 y (d) 5.
- 18.24.** Probar que si una sucesión de números tiene período  $N$  (es decir, la sucesión se repite tras  $N$  términos), todo promedio móvil de orden menor que  $N$  tiene período  $N$ . Ilus-

trar esto haciendo referencia al Problema 18.23.

- 18.25.** (a) En el Problema 18.24, ¿qué ocurre en el caso de un promedio móvil de orden  $N$ ?  
 (b) ¿Qué ocurre si el orden es mayor que  $N$ ? Ilustrar esto mediante el Problema 18.23.
- 18.26.** Probar que si todos los números de una sucesión se aumentan (o disminuyen) en una constante, el promedio móvil también aumenta (o disminuye) en esa misma constante.
- 18.27.** Demostrar que si todo número de una sucesión se multiplica (o divide) por una constante no nula, el promedio móvil queda también multiplicado (dividido) por esa constante.

- 18.28.** Hallar el promedio móvil ponderado de los números en el Problema 18.23, partes (b), (c) y (d), con pesos respectivos (b) 1, 2 y 1; (c) 1, 2, 2 y 1; y (d) 1, 2, 2 y 1. Comparar los resultados con los del Problema 18.23.
- 18.29.** (a) Probar las propiedades de los Problemas 18.26 y 18.27 para promedios móviles ponderados.  
(b) ¿Es válido el resultado del Problema 18.24 para promedios móviles ponderados?
- 18.30.** Una sucesión tiene (a) 24, (b) 25 y (c) 200 números. ¿Cuántos números habrá en un promedio móvil de orden 5?
- 18.31.** Una sucesión tiene  $M$  números.  
(a) Probar que en un promedio móvil de orden  $N$  habrá  $M - N + 1$  números. Ilustrar esto con varios ejemplos, usando distintos valores de  $M$  y  $N$ .  
(b) Discutir el caso  $M = N$ .
- 18.32.** La Tabla 18.34 muestra la producción mensual media (en miles) en EE.UU. de automóviles para los años 1976-1985. Construir (a) un promedio móvil de 2 años, (b) un promedio móvil centrado de 2 años, (c) un promedio móvil de 3 años, (d) un promedio móvil centrado de 4 años y (e) un promedio móvil centrado de 6 años.
- 18.33.** Representar en un gráfico los promedios móviles del Problema 18.32 junto con los datos originales, y discutir los resultados obtenidos.
- 18.34.** (a) Probar que el promedio móvil centrado de 2 años del Problema 18.32(b) es equivalente a un promedio móvil ponderado de 3 años con pesos respectivos 1, 2 y 1. Ilustrar esto mediante cálculos directos.  
(b) Probar que el promedio móvil centrado de 6 años del Problema 18.32(e) equivale a un promedio móvil ponderado apropiado.
- 18.35.** (a) Para los datos del Problema 18.32, determinar un promedio móvil ponderado de orden 3 con los pesos 1, 4 y 1.  
(b) Representar este promedio móvil y comparar con los resultados del Problema 18.32(c).
- 18.36.** La Tabla 18.35 presenta la producción total (en millones de libras) de todos los tipos de queso en los años 1983-1985. Construir (a) un promedio móvil de 12 meses, (b) un promedio móvil centrado de 12 meses y (c) un promedio móvil centrado de 6 meses. En las partes (b) y (c), representar en un gráfico el promedio móvil junto con los datos originales, y comparar los resultados.

Tabla 18.34

Año	Promedio mensual de producción de automóviles en EE.UU. (miles)
1976	708
1977	767
1978	764
1979	702
1980	533
1981	521
1982	421
1983	562
1984	635
1985	667

Fuente: Survey of Current Business.

Tabla 18.35

	1983	1984	1985
En.	375	387	391
Feb.	353	369	355
Mar.	417	413	412
Abr.	408	415	430
May.	429	437	456
Jun.	436	420	442
Jul.	401	388	439
Ag.	381	369	423
Sep.	375	349	400
Oct.	392	378	428
Nov.	388	372	412
Dic.	420	392	438

Fuente: Survey of Current Business.

## ESTIMACION DE LA TENDENCIA

Tabla 18.36

**18.37.** Obtener, por el método de semipromedios, los valores de tendencia para los datos del Problema 18.32, tomando como promedio (a) la media y (b) la mediana. Dibujar un gráfico que ilustre los resultados alcanzados.

**18.38.** Rehacer el Problema 18.32 usando (a) el método «a mano» y (b) un promedio móvil de orden adecuado. Comparar los resultados con los del Problema 18.37.

**18.39.** (a) Usar el método de mínimos cuadrados para ajustar una recta a los datos del Problema 18.32.

(b) A partir del resultado de la parte (a), hallar los valores de tendencia y compararlos con los de los Problemas 18.35 y 18.36.

**18.40.** (a) Ajustar una parábola  $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$  a los datos del Problema 18.9, usando los promedios mensuales de la Tabla 18.13 del Problema 18.10.

(b) Comparar los resultados del apartado (a) con los de la recta de mínimos cuadrados del Problema 18.10, y calcular los valores de tendencia.

**18.41.** Hallar valores de tendencia para los datos del Problema 18.36 usando (a) el método de semipromedios, (b) el método a mano, (c) un promedio móvil centrado de 12 meses y (d) una curva adecuada de mínimos cuadrados (para determinarla, úsese el gráfico de los datos originales construido en el Problema 18.36). Discutir las ventajas y desventajas de cada método.

## ESTIMACION DE LAS VARIACIONES ESTACIONALES; EL INDICE ESTACIONAL

**18.42.** La Tabla 18.36 muestra la producción mensual en EE.UU. (en miles) de acondicionadores de aire durante los años 1980-1985.

(a) Hacer un gráfico de los datos.

(b) Hallar un índice estacional por medio del método del porcentaje medio. Antes de hallar ese índice, ajustar los datos para tener en cuenta los años bisiestos.

	1980	1981	1982	1983	1984	1985
En.	203	222	191	88	168	209
Feb.	342	366	361	130	262	277
Mar.	434	623	572	309	504	530
Abr.	416	603	517	259	459	524
May.	344	477	419	300	588	632
Jun.	316	653	289	265	648	416
Jul.	566	283	145	306	187	171
Ag.	94	64	61	108	47	68
Sep.	66	52	17	58	40	49
Oct.	90	90	31	32	36	24
Nov.	125	94	71	52	51	39
Dic.	203	163	84	98	113	113

Fuente: Survey of Current Business.

**18.43.** Hallar un índice estacional para los datos del Problema 18.42 usando el método del porcentaje de tendencia. Para obtener los valores de tendencia, ajustar una curva adecuada de mínimos cuadrados a los promedios mensuales de los años dados.

**18.44.** Obtener un índice estacional para los datos del Problema 18.42 mediante el método del promedio móvil en porcentaje.

**18.45.** Hallar un índice estacional para los datos del Problema 18.42 por el método del enlace relativo.

**18.46.** Comparar los resultados obtenidos en los Problemas 18.42 al 18.45.

**18.47.** La Tabla 18.37 presenta la producción en EE.UU. de papel de prensa (en miles de toneladas cortas) durante los años 1980-1985.

(a) Construir un gráfico de los datos.

(b) Hallar un índice estacional por el método del porcentaje medio.

Tabla 18.37

	1980	1981	1982	1983	1984	1985
En.	343	379	415	403	417	425
Feb.	334	356	378	378	410	406
Mar.	358	399	420	406	434	443



**Tabla 18.37.** (Continuación)

	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Abr.	339	391	396	364	422	387
May.	368	402	385	399	436	418
Jun.	356	404	383	372	424	408
Jul.	341	405	363	378	409	416
Ag.	374	426	372	419	426	414
Sep.	353	400	353	377	415	405
Oct.	377	420	406	406	426	407
Nov.	358	412	373	414	417	397
Dic.	338	359	330	372	389	398

Fuente: Survey of Current Business.

- 18.48.** Rehacer el Problema 18.47 por el método del porcentaje de tendencia.
- 18.49.** Rehacer el Problema 18.47 por el método del promedio móvil en porcentaje.
- 18.50.** Rehacer el Problema 18.47 por el método del enlace relativo.
- 18.51.** Comparar los índices estacionales obtenidos en los Problemas 18.47 al 18.50.
- 18.52.** Obtener un índice estacional para el Problema 18.36 usando dos métodos y comparar los resultados.
- 18.53.** (a) Para los datos del Problema 18.9, calcular un índice estacional para los 3 últimos años, usando el método que se desee.  
(b) Comparar los dos índices obtenidos en el apartado (a).
- 18.54.** Ajustando sus datos para tener en cuenta los años bisiestos, rehacer los Problemas 18.42 al 18.45. Determinar si el ajuste tiene influencia significativa sobre el índice estacional finalmente obtenido.

#### DATOS AJUSTADOS A LA VARIACION ESTACIONAL

- 18.55.** (a) Ajustar los datos del Problema 18.42 a las variaciones estacionales, usando cualquiera de los índices estacionales

calculados en los Problemas 18.42 a 18.45.

- (b) Dibujar un gráfico con los datos así ajustados y explicar los resultados obtenidos.
- 18.56.** (a) Ajustar los datos del Problema 18.47 a las variaciones estacionales, usando cualquiera de los resultados de los Problemas 18.47 a 18.51.  
(b) Dibujar un gráfico con los datos así ajustados y explicar los resultados obtenidos.
- 18.57.** (a) Ajustar los datos del Problema 18.36 a las variaciones estacionales, usando los dos índices estacionales obtenidos en el Problema 18.52.  
(b) Dibujar un gráfico con los datos así ajustados y explicar los resultados obtenidos.

#### ESTIMACION DE VARIACIONES CICLICAS E IRREGULARES

- 18.58.** (a) Ajustar a la tendencia los datos del Problema 18.55, usando cualquier método.  
(b) Dibujar en un gráfico los datos así obtenidos.  
(c) Tomar promedios móviles de 3 y 7 meses para los datos de la parte (a).  
(d) Representar en un gráfico los resultados de la parte (c) y explicar la variación observada. En particular, identificar cualquier movimiento cíclico que esté presente.
- 18.59.** Rehacer el Problema 18.58 para los datos del Problema 18.56.
- 18.60.** Rehacer el Problema 18.58 para los datos del Problema 18.57.
- 18.61.** En la Tabla 18.38 puede verse la producción media mensual en EE.UU. de papel de prensa (en miles de toneladas cortas) en los años 1960-1985.  
(a) Hacer un gráfico con los datos.  
(b) Una vez analizados los datos, discutir si hay evidencia de ciclos en ellos.

**Tabla 18.38**

Año	Promedio mensual
1960	170
1961	174
1962	179
1963	185
1964	188
1965	182
1966	201
1967	218
1968	245
1969	269
1970	276
1971	275
1972	285

Fuente: Survey of Current Business.

Año	Promedio mensual
1973	286
1974	290
1975	297
1976	307
1977	323
1978	317
1979	342
1980	353
1981	396
1982	381
1983	391
1984	419
1985	410

Fuente: Survey of Current Business.

**18.62.** Al ajustar los datos a la tendencia y a las variaciones estacionales, ¿importa cuál de esos ajustes se hace primero? Incluir en la respuesta (a) una discusión teórica y (b) una ilustración que emplee la serie en el tiempo de los Problemas 18.42, 18.47 ó 18.53.

**18.63.** (a) Resolver el Problema 18.19 usando un promedio móvil centrado de 12 meses y construir el gráfico.

(b) ¿Qué conclusiones se sacan de los resultados del apartado (a)?

**18.64.** (a) Obtener una distribución de frecuencias para las magnitudes de las variaciones irregulares halladas en los Problemas 18.17 y 18.18.

(b) ¿Se aproxima la distribución hallada en (a) a una distribución normal? En caso afirmativo, dar una razón de que tal cosa suceda.

**PREDICCIÓN**

**18.65.** (a) Predecir, a la vista de los resultados del Problema 18.42, la producción de acondicionadores de aire para 1986.

(b) Discutir posibles fuentes de error.

(c) Comparar la predicción con los valores reales para 1986 que se recogen en la Tabla 18.39.

**Tabla 18.39**

En.	131
Feb.	175
Mar.	422
Abr.	456
May.	451
Jun.	427
Jul.	361
Ag.	89
Sep.	89
Oct.	53
Nov.	56
Dic.	77

Fuente: Survey of Current Business.

**18.66.** (a) Predecir, a la vista de los resultados del Problema 18.47, la producción de papel de prensa para 1986.

(b) Discutir posibles fuentes de error.

(c) Comparar la predicción con los valores reales para 1986 que se recogen en la Tabla 18.40.

(d) ¿Ayuda el uso de los datos extra del Problema 18.61? Explicar la respuesta.

Tabla 18.40

En.	420
Feb.	394
Mar.	444
Abr.	409
May.	446
Jun.	420
Jul.	433
Ag.	441
Sep.	420
Oct.	426
Nov.	429
Dic.	428

Fuente: Survey of Current Business.

- 18.67. Usar la parábola de mínimos cuadrados del Problema 18.40 para obtener los datos para 1982 en el Problema 18.9, y comparar los valores dados por la predicción con los valores reales que se ven en la Tabla 18.32 del Problema 18.21.
- 18.68. La Tabla 18.41 muestra la producción (en millones de libras) de mantequilla en EE.UU. durante los años 1979-1983. En 1982, sin embargo, los datos se recogieron trimestralmente desde abril, no mensualmente. El total de cada uno de esos trimestres aparece en negrita en la tabla. Usar métodos de análisis de series en el tiempo para estimar los valores mensuales que faltan. Discutir posibles fuentes de error.
- 18.69. Omitir algunos datos de la Tabla 18.12 del Problema 18.9 y ver si se logran recuperar mediante técnicas de análisis de series en el tiempo.
- 18.70. Rehacer el problema anterior con los datos de los Problemas 18.42 y 18.47.

Tabla 18.41

	1979	1980	1981	1982	1983
En.	97.4	103.8	121.3	128.3	133.9
Feb.	86.6	99.1	110.1	116.8	120.7
Mar.	89.3	101.7	116.7	123.4	126.1
Abr.	92.4	112.3	116.9		126.5
May.	99.2	116.6	115.5	<b>332.9</b>	121.1
Jun.	83.0	93.9	95.9		104.6
Jul.	72.5	83.7	82.7		94.7
Ag.	64.3	75.3	82.3	<b>262.2</b>	83.9
Sep.	60.5	77.0	85.2		84.2
Oct.	78.0	91.4	99.5		98.3
Nov.	75.8	84.7	93.4	<b>295.1</b>	98.8
Dic.	84.0	103.6	109.5		108.5

Fuente: Survey of Current Business.

### PROBLEMAS DIVERSOS

- 18.71. Analizar cada una de las series en el tiempo, (a) hasta (e), en las Tablas 18.42 y 18.43, que dan datos de EE.UU. para los años 1960-1986 y 1979-1986, respectivamente. Si se desea úsese sólo los datos hasta 1985 y hágase la predicción de los de 1986, que podrán así ser comparados con los datos reales. Nótese que la Tabla 18.42 muestra los *promedios mensuales* para cada año, mientras la Tabla 18.43 contiene los *valores mensuales* para cada año.
- 18.72. En la Tabla 18.44 se presentan las ventas mensuales totales (en millones de dólares) de los fabricantes de maquinaria eléctrica en EE.UU. durante los años 1979-1986.
- Analizar los esquemas estacional y cíclico de la serie en el tiempo.
  - Identificar y discutir las dificultades que implica el análisis a causa de la inflación de los precios.

Tabla 18.42

Años	(a) Viviendas construidas (miles)	(b) Producción de hulla (millones de toneladas cortas)	(c) Automóviles nuevos vendidos (miles)	(d) Producción de tabazón para la construcción (millones de pies de tabla)	(e) Producción de aluminio (miles de toneladas cortas)
1960	106.6	32.72	556		167.9
1961	113.8	33.58	462	2654	158.6
1962	123.5	35.25	578	2740	176.5
1963	136.7	38.24	637	2879	192.7
1964	132.1	40.17	646	2951	212.7
1965	128.6	42.67	776	3075	229.6
1966	104.3	44.33	717	3011	247.3
1967	110.2	46.05	620	2940	272.4
1968	129.0	44.99	735	3089	271.3
1969	125.0	46.71	685	3162	316.1
1970	122.1	49.17	546	3050	331.3
1971	173.7	46.02	715	3051	327.1
1972	198.2	49.62	735	3239	343.5
1973	171.5	49.17	805	3191	377.5
1974	112.7	49.26	611	2872	408.6
1975	97.7	53.19	560	2654	323.3
1976	129.0	55.42	708	3045	354.3
1977	165.8	56.00	767	3125	378.1
1978	152.6	53.94	764	3128	400.2
1979	145.8	64.17	702	3084	418.5
1980	109.3	69.17	533	2613	427.5
1981	91.7	68.67	521	2435	412.3
1982	89.3	69.15	421	2224	300.8
1983	142.7	64.85	562	2610	281.6
1984	146.3	74.15	635	2830	341.6
1985	145.4	73.52	667	3050	291.6
1986	150.6	73.70	626	3363	253.0

Fuente: Survey of Current Business.

Tabla 18.43

Años	(a) Viviendas construidas (miles)	(b) Producción de hulla (millones de toneladas cortas)	(c) Automóviles nuevos vendidos (miles)	(d) Producción de tablazón para la construcción (millones de pies de tabla)	(e) Producción de aluminio (miles de toneladas cortas)
<b>1979</b>					
En.	88.4	56.49	737	2877	418
Feb.	84.7	53.63	709	2877	379
Mar.	153.3	65.49	883	3306	419
Abr.	161.3	62.79	761	3119	402
May.	189.1	67.93	922	3219	423
Jun.	192.0	69.40	820	3143	410
Jul.	165.0	54.50	587	3018	429
Ag.	171.4	72.10	449	3355	430
Sep.	163.8	63.90	630	3131	419
Oct.	169.0	75.91	787	3412	435
Nov.	119.2	67.56	641	2914	423
Dic.	91.8	60.32	494	2631	435
<b>1980</b>					
En.	73.4	67.81	513	2798	431
Feb.	80.6	64.33	619	2835	406
Mar.	86.1	69.87	649	2879	434
Abr.	96.6	69.87	572	2257	421
May.	93.0	70.40	518	2307	438
Jun.	117.8	71.36	544	2486	425
Jul.	121.5	60.70	432	2479	427
Ag.	131.7	70.24	299	2783	426
Sep.	147.0	72.06	529	2818	419
Oct.	153.7	75.75	675	2903	437
Nov.	113.5	65.51	560	2480	427
Dic.	96.3	72.12	490	2329	439
<b>1981</b>					
En.	85.2	66.16	439	2523	445
Feb.	72.5	69.79	475	2542	404
Mar.	108.9	77.27	620	2818	448
Abr.	124.0	38.02	645	2780	431
May.	110.6	37.28	670	2651	441
Jun.	107.0	61.90	712	2588	420
Jul.	101.0	73.35	513	2483	426
Ag.	87.3	78.20	345	2554	416
Sep.	90.9	81.30	522	2307	393
Oct.	88.1	84.78	520	2379	396
Nov.	64.9	76.03	425	1831	364
Dic.	59.7	79.97	370	1765	364

Tabla 18.43. (Continuación)

Años	(a) Viviendas construidas (miles)	(b) Producción de hulla (millones de toneladas cortas)	(c) Automóviles nuevos vendidos (miles)	(d) Producción de tablazón para la construcción (millones de pies de tabla)	(e) Producción de aluminio (miles de toneladas cortas)
<b>1982</b>					
En.	47.6	65.72	273	1810	351
Feb.	52.0	69.62	320	1891	311
Mar.	78.7	82.93	469	2148	336
Abr.	85.1	73.16	488	2281	319
May.	99.2	70.66	510	2251	321
Jun.	91.9	71.23	561	2338	300
Jul.	107.2	59.87	439	2376	297
Ag.	97.2	72.09	356	2560	287
Sep.	108.4	67.60	429	2445	271
Oct.	111.5	70.48	431	2333	275
Nov.	109.9	63.68	407	2247	266
Dic.	83.4	62.73	366	2004	275
<b>1983</b>					
En.	92.9	61.85	457	2484	279
Feb.	96.7	60.26	474	2481	223
Mar.	135.8	68.13	575	2682	248
Abr.	136.4	61.27	529	2623	245
May.	175.5	62.94	587	2645	265
Jun.	173.8	62.23	644	2718	261
Jul.	162.0	55.03	461	2585	284
Ag.	177.7	73.11	492	2714	297
Sep.	156.8	70.44	627	2748	299
Oct.	159.9	71.34	678	2787	320
Nov.	136.4	68.27	636	2504	318
Dic.	108.5	63.35	581	2345	340
<b>1984</b>					
En.	109.2	67.87	647	2740	342
Feb.	130.4	73.68	682	2678	324
Mar.	138.1	81.59	772	3104	350
Abr.	173.0	71.71	665	2983	348
May.	182.2	79.83	699	2828	365
Jun.	184.3	75.29	676	2968	351
Jul.	163.1	73.92	517	2685	349
Ag.	147.8	90.37	519	2933	344
Sep.	149.6	78.54	538	2776	329
Oct.	152.7	69.42	686	3154	338
Nov.	126.5	64.04	668	2814	325
Dic.	99.0	63.48	553	2295	334

Tabla 18.43. (Continuación)

Años	(a) Viviendas construidas (miles)	(b) Producción de hulla (millones de toneladas cortas)	(c) Automóviles nuevos vendidos (miles)	(d) Producción de tablarón para la construcción (millones de pies de tabla)	(e) Producción de aluminio (miles de toneladas cortas)
<b>1985</b>					
En.	105.4	67.98	733	2727	329
Feb.	95.8	67.04	659	2718	289
Mar.	145.2	77.66	736	3085	312
Abr.	176.0	76.54	744	3296	295
May.	170.5	78.24	760	3256	304
Jun.	163.4	73.02	677	3101	288
Jul.	161.0	69.01	565	3034	292
Ag.	161.1	79.48	554	3299	289
Sep.	148.6	73.82	638	3196	280
Oct.	173.2	80.12	739	3387	285
Nov.	124.1	69.29	658	2851	265
Dic.	120.5	70.01	540	2649	271
<b>1986</b>					
En.	115.9	78.29	713	3092	273
Feb.	107.2	72.69	675	3046	251
Mar.	151.1	77.57	655	3347	281
Abr.	188.3	74.89	713	3362	275
May.	186.7	73.14	685	3405	284
Jun.	183.6	72.67	706	3355	241
Jul.	172.2	67.82	505	2967	231
Ag.	163.8	76.55	426	3441	235
Sep.	154.3	75.02	637	3397	231
Oct.	154.9	76.83	684	3820	243
Nov.	115.7	68.67	556	3496	239
Dic.	113.1	70.26	561	3623	252

Fuente: Survey of Current Business.

Tabla 18.44

	En.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
1979	8.128	9.107	9.562	8.873	8.990	9.851	8.178	9.029	9.877	9.790	9.614	9.720
1980	9.204	10.617	10.778	9.909	9.838	10.714	9.150	10.263	11.169	11.459	11.201	10.596
1981	9.986	11.293	11.812	11.301	11.338	12.452	10.463	11.465	12.397	11.988	11.725	11.125
1982	10.410	11.689	12.094	11.831	11.949	12.588	10.843	11.327	12.301	11.908	11.496	11.421
1983	11.042	12.214	13.028	12.462	12.526	13.890	11.481	12.416	14.398	14.066	14.059	14.330
1984	13.129	14.435	15.791	14.646	14.980	16.549	13.700	15.009	16.718	15.605	15.372	16.572
1985	13.557	15.288	16.352	14.612	14.796	16.844	13.586	15.064	16.565	16.104	16.509	16.237
1986	13.614	15.887	17.024	15.549	15.504	17.537	14.643	16.375	18.362	17.240	17.614	17.845

Fuente: Survey of Current Business.

# CAPITULO 19

## Números índice

### NUMERO INDICE

Un *número índice* es una medida estadística diseñada para poner de relieve cambios en una variable o en un grupo de variables relacionadas con respecto al tiempo, situación geográfica, ingresos, o cualquier otra característica. Una colección de números índice para diferentes años, lugares, etc., se llama a veces una *serie de índices*.

### APLICACIONES DE LOS NUMEROS INDICE

Los números índice se usan para hacer comparaciones. Por ejemplo, con números índice podemos comparar los costes de alimentación o de otros servicios en una ciudad durante un año con los del año anterior, o la producción de acero en un año en una zona del país con la de otra zona. Aunque se usan principalmente en economía e industria, los números índice son aplicables en muchos otros campos. En educación, por ejemplo, se pueden usar los números índice para comparar la inteligencia relativa de estudiantes en sitios diferentes o en años diferentes.

Muchos gobiernos y agencias privadas se ocupan de elaborar números índice (o índices, como se les llama a veces) con el propósito de predecir condiciones económicas o industriales, tales como índices de paro, de producción, salariales y tantos otros. Tal vez el más conocido sea el *índice de coste de la vida* o *índice de precios al consumo*, que prepara el Instituto de Estadística. En muchos contratos aparecen ciertas *cláusulas de revisión* que producen aumentos salariales automáticos correspondientes a los aumentos del índice de precios al consumo.

En este capítulo estaremos interesados sobre todo en números índice que muestran cambios respecto del tiempo, si bien los métodos descritos en este capítulo son aplicables ciertamente en otros casos.

### RELACIONES DE PRECIOS

Uno de los ejemplos más simples de un número índice es una *relación de precios*, que no es sino el cociente entre el precio de un artículo en un período dado y su precio en otro período, conocido como *período base* o *período de referencia*. Supondremos, por sencillez, que los precios en cada período son constantes. Si no lo son, podemos tomar un promedio adecuado para el período de modo que la suposición sea esencialmente válida.



Si  $p_n$  y  $p_o$  denotan los precios de un artículo durante el período dado y el período base, respectivamente, entonces, por definición,

$$\text{Relación de precios} = \frac{p_n}{p_o} \tag{1}$$

La relación de precios se expresa habitualmente como un porcentaje multiplicándola por 100.

Más en general, si  $p_a$  y  $p_b$  son los precios de un artículo durante los períodos  $a$  y  $b$ , respectivamente, la relación de precios en el período  $b$  con respecto al período  $a$  se define como  $p_b/p_a$  y se denota por  $p_{a|b}$ , notación que resultará de utilidad. Con esta notación, la relación de precios en la ecuación (1) se denota por  $p_{o|n}$ .

**EJEMPLO 1.** Supongamos que los precios al consumo de un cuarto de galón de leche en los años 1970 y 1980 eran de 45¢ y 54¢, respectivamente. Tomando 1970 como *año base* y 1980 como el *año dado*, tenemos

$$\text{Relación de precios} = p_{1970|1980} = \frac{\text{precio en 1980}}{\text{precio en 1970}} = \frac{54¢}{45¢} = 1.2 = 120\%$$

o brevemente 120, omitiendo el signo % (como se hace con frecuencia en la literatura estadística). Este resultado simplemente significa que en 1980 el precio de la leche era el 120% del de 1970; es decir, aumentó un 20%.

**EJEMPLO 2.** Con 1980 como año base y 1970 como año dado en el Ejemplo 1, se tiene

$$\text{Relación de precios} = p_{1980|1970} = \frac{\text{precio en 1970}}{\text{precio en 1980}} = \frac{45¢}{54¢} = \frac{5}{6} = 83\frac{1}{3}\%$$

o sea  $83\frac{1}{3}$ . Esto quiere decir que en 1970 el precio de la leche era el  $83\frac{1}{3}\%$  del de 1980; esto es, era  $16\frac{2}{3}\%$  menor que en 1980.

Nótese que la relación de precios para un período dado con respecto al *mismo* período es siempre 100%, o sea 100. En particular, la relación de precios correspondiente al período base es siempre 100. Esto da cuenta de la notación (frecuente en la literatura estadística) de escribir, por ejemplo, «1970 = 100» para indicar que se ha tomado 1970 como período base.

## PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DE PRECIOS

Si  $p_a, p_b, p_c, \dots$  denotan los precios en los períodos  $a, b, c, \dots$ , respectivamente, tenemos las siguientes propiedades para las relaciones de precios asociadas. Las demostraciones son consecuencia inmediata de las definiciones.

- Propiedad identidad:**  $p_{a|a} = 1$  Esto dice simplemente que la relación de precios para un período respecto de él mismo es 1, o sea 100%.
- Propiedad de inversión temporal:**  $p_{a|b}p_{b|a} = 1$ , o sea  $p_{a|b} = 1/p_{b|a}$ . Esto afirma que si dos períodos se intercambian, las correspondientes relaciones de precios son cada una la inversa de la otra (véase Ejemplos 1 y 2).
- Propiedad cíclica o circular:**  $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|a} = 1$ ,  $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|d}p_{d|a} = 1$ , etc.

4. **Propiedad cíclica (o circular) modificada:**  $p_{a|b}p_{b|c} = p_{a|c}$ ,  $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|d} = p_{a|d}$ , etc. Esta propiedad se sigue directamente de las Propiedades 2 y 3.

## RELACIONES DE CANTIDAD O DE VOLUMEN

En vez de comparar los precios de un artículo, podemos estar interesados en comparar las cantidades (o volúmenes) de producción, consumo o exportación. En tales casos hablamos de *relaciones de cantidad* o *relaciones de volumen*. Por sencillez, como en el caso de los precios, suponemos que las cantidades son constantes en cada período. Si no lo son, se pueden tomar promedios adecuados de forma que esencialmente la hipótesis sea válida.

Si  $q$  denota la cantidad (o volumen) de un artículo que se ha producido, consumido, exportado, etcétera durante un período base, y  $q$  la correspondiente cantidad producida, consumida, exportada, etcétera durante un período dado, definimos

$$\text{Relación de cantidad o de volumen} = \frac{q_n}{q_o} \quad (2)$$

que se suele expresar como porcentaje.

Al igual que para las relaciones de precios, usamos la notación  $q_{a|b} = q_b/q_a$  para denotar la relación de cantidad en el período  $b$  respecto al período  $a$ . Las mismas observaciones y propiedades comentadas para las relaciones de precios son válidas para las relaciones de cantidad.

## RELACIONES DE VALOR

Si  $p$  es el precio de un artículo durante un período y  $q$  es la cantidad (o volumen) producida, vendida, etc., durante ese período, entonces  $pq$  se llama el *valor total*. Así, si 1000 cuartos (de galón de leche se venden a 56¢ el cuarto, el valor total es  $pq = (\$0.56)(1000) = \$560$ .

Si  $p_o$  y  $q_o$  son el precio y la cantidad de un artículo durante un período base, y  $p_n$  y  $q_n$  el precio y la cantidad correspondientes a un período dado, los valores totales durante esos períodos vienen dados por  $v_o$  y  $v_n$ , respectivamente, y definimos

$$\text{Relación de valor} = \frac{v_n}{v_o} = \frac{p_n q_n}{p_o q_o} = \left( \frac{p_n}{p_o} \right) \left( \frac{q_n}{q_o} \right) = \text{relación de precios} \times \text{relación de cantidad} \quad (3)$$

Las mismas observaciones, notación y propiedades aplicables a las relaciones de precios y a las relaciones de cantidad lo son a las relaciones de valor. En particular, si  $p_{a|b}$ ,  $q_{a|b}$  y  $v_{a|b}$  denotan las relaciones de precios, cantidad y valor del período  $b$  respecto al período  $a$ , entonces, como en la ecuación (3),

$$v_{a|b} = p_{a|b} q_{a|b}$$

que se llama la *propiedad de inversión de factores*.

## RELACIONES DE ENLACE Y EN CADENA

Si  $p_1, p_2, p_3, \dots$  representan los precios durante intervalos sucesivos de tiempo 1, 2, 3, ..., entonces  $p_{1|2}, p_{2|3}, p_{3|4}, \dots$  representan las relaciones de precios de cada intervalo respecto al intervalo de tiempo precedente, y se llaman *relaciones de enlace*.

**EJEMPLO 3.** Si los precios de un artículo durante 1983, 1984, 1985 y 1986 fueron 8¢, 12¢ 15¢ y 18¢, respectivamente, entonces las relaciones de enlace son  $p_{1983|1984} = \frac{12}{8} = 150(\%)$ ,  $p_{1984|1985} = \frac{15}{12} = 125(\%)$  y  $p_{1985|1986} = \frac{18}{15} = 120(\%)$ .

La relación de precios para un período dado con respecto a otro tomado como base, se puede siempre expresar en términos de relaciones de enlace. Esto es una consecuencia de la propiedad *cíclica*, o *circular*, de las relaciones. Así,  $p_{5|2} = p_{5|4}p_{4|3}p_{3|2}$ .

**EJEMPLO 4.** Por ejemplo 3, la relación de precios para 1986 con respecto al año base 1983 es

$$p_{1983|1986} = p_{1983|1984}p_{1984|1985}p_{1985|1986} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = \frac{18}{8} = 225(\%)$$

Las relaciones de precios con respecto a un período base fijo, que como hemos visto se pueden hallar mediante relaciones de enlace, se llaman en ocasiones *relaciones en cadena* con respecto a esa base.

**EJEMPLO 5.** En los Ejemplos 3 y 4, la colección de relaciones en cadena para los años 1984, 1985 y 1986 con respecto a la base 1983 viene dada por

$$p_{1983|1984} = \frac{12}{8} = 150(\%)$$

$$p_{1983|1985} = p_{1983|1984}p_{1984|1985} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} = 187.5(\%)$$

$$p_{1983|1986} = p_{1983|1984}p_{1984|1985}p_{1985|1986} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = 225(\%)$$

Las ideas anteriores son también aplicables a las relaciones de cantidad y a las relaciones de valor.

## PROBLEMAS IMPLICITOS EN EL CALCULO DE NUMEROS INDICE

A la hora de las aplicaciones prácticas estamos menos interesados en comparar precios, cantidades o valores de artículos aislados que en comparar los precios (etc.) de grandes grupos de artículos. Por ejemplo, al calcular un índice de precios al consumo no sólo queremos comparar los precios de la leche en dos períodos, sino también el precio de los huevos, de la carne, del calzado, de la vivienda, etc., de modo que se consiga una visión general. Naturalmente, podríamos simplemente hacer una lista con *todos* esos precios, pero eso no sería muy satisfactorio. Lo deseable es disponer de *un solo* número índice de precios que compare los precios en ambos períodos *en promedio*.

No es difícil ver que los cálculos de números índice que afecten a un grupo de artículos conllevan muchos problemas que hay que solventar. Al calcular un índice de precios al consumo, por ejemplo, debemos decidir qué artículos o servicios deben incluirse, así como su peso de importancia relativa; hemos de recolectar datos referentes a precios y cantidades de tales artículos; hemos de decidir qué hacer con las distintas *calidades* dentro de un mismo artículo, o con ciertos artículos o servicios que están disponibles un año pero no en el año base; por fin, hemos de decidir cómo reunir toda esa información y sacar un solo número índice del coste de la vida que tenga significado práctico.

## EL USO DE PROMEDIOS

Ya que hemos de llegar a un solo número índice resumiendo una gran cantidad de información, es fácil comprender que los promedios (discutidos en el Capítulo 3) juegan un papel importante en el cálculo de números índice.

Así como existen muchos métodos para calcular promedios, también hay muchos para calcular los números índice, cada uno con sus ventajas y desventajas propias.

En lo que sigue examinaremos unos pocos métodos comúnmente empleados en la práctica, usando varios procedimientos para promediar. Aunque nos restringimos a índices de precios al principio, veremos cómo modificar adecuadamente las cosas para el caso de índice de valor o de cantidad.

## CRITERIOS TEORICOS PARA NUMEROS INDICE

Desde un punto de vista teórico es deseable que los números índice para grupos de artículos tengan las propiedades que cumplían las relaciones (números índice para un solo artículo). Todo número índice que tenga tal o cual propiedad se dice que satisface el criterio asociado con ella. Por ejemplo, los números índice que tengan la propiedad de inversión temporal se dirá que satisfacen el *criterio de inversión temporal*, etc.

No se conoce ningún número índice que cumpla todos los criterios, si bien en muchos casos se satisfacen aproximadamente. El índice ideal de Fisher (pág. 484), que en particular verifica el *criterio de inversión temporal* y el de *inversión de factores*, es mejor que cualquier otro número índice útil en cuanto a satisfacer las propiedades consideradas importantes (de ahí el apelativo de «ideal»).

Desde una perspectiva práctica, no obstante, otros números índice sirven también, y examinaremos algunos de ellos.

## NOTACION

Es habitual denotar por  $p_n^{(1)}, p_n^{(2)}, p_n^{(3)}, \dots$  los precios de un primer, segundo, tercer, ... artículo durante un período dado  $n$ , mientras los precios respectivos en el período base se denotan por  $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)}, \dots$ , etcétera. Los números 1, 2, 3, ... son *superíndices* y no deben ser confundidos con exponentes. Con esa notación, el precio del artículo  $j$  durante el período  $n$  es  $p_n^{(j)}$ .

Como en capítulos anteriores, podemos usar la notación de sumatorio al sumar sobre el índice  $j$ . Por ejemplo, supuesto que haya un total de  $N$  artículos, la suma de sus precios durante el período  $n$  se puede expresar como  $\sum_{j=1}^N p_n^{(j)}$  o  $\sum p_n^{(j)}$ . Sin embargo, es más sencillo omitir el superíndice y

escribir  $\sum p_n$ , cosa que haremos cuando no haya riesgo de confusión; recuérdese que el simbolismo completo está sobrentendido. Con esta notación,  $\sum p_o$  denotará la suma de los precios de todos los artículos durante el período base.

Análoga notación se usa para cantidades y valores.

### EL METODO DE AGREGACION SIMPLE

En este método de calcular un índice de precios, expresamos el precio total de los artículos en el año dado como porcentaje del precio total de los artículos en el año base. En símbolos,

$$\text{Índice de precios por agregación simple} = \frac{\sum p_n}{\sum p_o} \tag{4}$$

donde  $\sum p_o$  = suma de todos los precios de los artículos en el año base

$\sum p_n$  = suma de todos los precios de los artículos en el año dado

y donde el resultado se expresa como porcentaje, al igual que se hace con los números índice en general.

Aunque este método es fácil de aplicar, tiene dos grandes desventajas que lo convierten en insatisfactorio:

1. No tiene en cuenta la importancia relativa de los diversos artículos. Así pues, asigna igual peso a la leche que a la crema de afeitar a la hora de calcular el índice de precios al consumo.
2. Las unidades escogidas al anotar los precios (galones, bushels, libras, ...) afectan al índice. (Véase Prob. 19.12.)

### EL METODO DEL PROMEDIO SIMPLE DE RELACIONES

El índice producido por este método depende del procedimiento utilizado para promediar las relaciones de precios; los procedimientos incluyen la media aritmética, la geométrica, la armónica y la mediana. Con la media aritmética, por ejemplo, tendríamos

$$\text{Índice de la media aritmética simple de relaciones de precios} = \frac{\sum p_n/p_o}{N} \tag{5}$$

donde  $\sum p_n/p_o$  = suma de todas las relaciones de precios de los artículos.

$N$  = número de relaciones de precios de artículos utilizados.

Para índices basados en otros tipos de promedios, véanse Problemas 19.14 y 19.15.

Si bien este método no tiene ya la segunda desventaja antes citada, todavía mantiene la primera.

## EL METODO DE AGREGACION PONDERADA

Con el fin de evitar las desventajas del método de agregación simple, asignamos un *peso* al precio de cada artículo, en general la cantidad (o volumen) vendida durante el año base, durante el año dado o durante algún año típico (que puede ser un promedio de varios años). Tales pesos indican la importancia del artículo en cuestión. Dependiendo de que se use el año base, el año dado o un año típico (denotados respectivamente por  $q_0$ ,  $q_n$  y  $q_t$ ), usamos una de las siguientes fórmulas:

### 1. Índice de Laspeyres o método del año base:

Índice de precios por agregación ponderada con pesos de cantidad en el año base = 
$$\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_o q_0} \quad (6)$$

### 2. Índice de Paasche o método del año dado:

Índice de precios por agregación ponderada con pesos de cantidad en el año dado = 
$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} \quad (7)$$

### 3. El método del año típico: Si $q$ denota la cantidad durante algún período típico $t$ , definimos

Índice de precios por agregación ponderada con pesos de cantidad en el año típico = 
$$\frac{\sum p_n q_t}{\sum p_o q_t} \quad (8)$$

Para  $t = 0$  y  $t = n$ , esto se reduce a las ecuaciones (6) y (7), respectivamente.

## INDICE IDEAL DE FISHER

Definimos

$$\text{Índice ideal de Fisher} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_o q_0}\right)\left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}\right)} \quad (9)$$

Este índice de precios es la media geométrica de los números índice de Laspeyres y de Paasche dados por las ecuaciones (6) y (7). Como ya hemos comentado, el índice ideal de Fisher satisface los *criterios de inversión temporal* y de *inversión de factores*, lo que le confiere una cierta ventaja teórica sobre otros números índice.

## EL INDICE DE MARSHALL-EDGEWORTH

El índice de Marshall-Edgeworth usa el método de agregación ponderada con año típico, en el que los pesos se toman como la media aritmética de las cantidades del año base y del año dado; es decir,  $q_t = \frac{1}{2}(q_0 + q_n)$ . Sustituyendo este valor de  $q$  en la ecuación (8) resulta

$$\text{Índice de Marshall-Edgeworth} = \frac{\sum p_n (q_0 + q_n)}{\sum p_o (q_0 + q_n)} \quad (10)$$

## EL METODO DEL PROMEDIO PONDERADO DE RELACIONES

Para paliar las desventajas del método del promedio simple de relaciones se puede usar un *promedio ponderado de relaciones*. El promedio ponderado más utilizado es la *media aritmética ponderada*, aunque también se utilizan otros, como la media geométrica ponderada (véase Cap. 3).

En este método asignamos a cada relación de precios un peso dado por el valor total del artículo en términos de alguna unidad monetaria, digamos el dolar. Como el valor de un artículo se obtiene multiplicando su precio  $p$  por la cantidad  $q$ , los pesos vienen dados por  $pq$ .

Según se use el año base, el año dado o el año típico para calcular tales pesos (denotados respectivamente por  $p_0q_0$ ,  $p_nq_n$  y  $p_tq_t$ ), usamos una u otra de las fórmulas siguientes:

Media aritmética ponderada de relaciones de precios, usando pesos del año base:

$$\frac{\sum (p_n/p_0)(p_0q_0)}{\sum p_0q_0} = \frac{\sum p_nq_0}{\sum p_0q_0} \quad (11)$$

Media aritmética ponderada de relaciones de precios, usando pesos de un año típico:

$$\frac{\sum (p_n/p_0)(p_nq_n)}{\sum p_nq_n} \quad (12)$$

Media aritmética ponderada de relaciones de precios, usando pesos de un año típico:

$$\frac{\sum (p_n/p_0)(p_tq_t)}{\sum p_tq_t} \quad (13)$$

Nótese que la fórmula (11) da el mismo resultado que la (6) de Laspeyres.

## NUMEROS INDICE DE CANTIDAD O VOLUMEN

Las fórmulas descritas previamente para la obtención de números índice de precios se modifican fácilmente para hallar números índice de cantidad (o volumen) intercambiando simplemente  $p$  y  $q$ . Por ejemplo, sustituyendo  $p$  por  $q$  en la ecuación (5) resulta

$$\text{Índice de media aritmética simple de relaciones de volumen} = \frac{\sum q_n/q_0}{N} \quad (14)$$

donde  $\sum q_n/q_0$  = suma de relaciones de cantidad de todos los artículos  
 $N$  = número de relaciones de cantidad usadas

Análogamente, las fórmulas (6) y (7) se convierten en

$$\text{Índice de agregación ponderada de volumen con pesos del año base} = \frac{\sum q_n p_0}{\sum q_0 p_0} \quad (15)$$

$$\text{Indice de agregación ponderada de volumen con pesos del año dado} = \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_n} \quad (16)$$

La fórmula (15) se llama a veces un *índice de volumen de Laspeyres*, y la (10) un *índice de volumen de Paasche*. En estas fórmulas se toman los precios como pesos. No obstante, cabe utilizar cualquier otro peso apropiado.

De forma parecida se modifican las fórmulas (8) a (13).

## NUMEROS INDICE DE VALOR

Exactamente igual que hemos hecho con los números índice de precios o de cantidad, se pueden definir *índices de valor*. El más sencillo de ellos es

$$\text{Indice de valor} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} \quad (17)$$

donde  $\sum p_0 q_0$  = valor total de todos los artículos en el período base

$\sum p_n q_n$  = valor total de todos los artículos en el período dado

Este es un *índice de agregación simple*, ya que los valores no han recibido pesos relativos. Se pueden enunciar fórmulas que les asignen pesos para tener en cuenta la importancia relativa de los artículos.

## CAMBIO DEL PERIODO BASE EN LOS NUMEROS INDICE

En la práctica es deseable que el período base elegido para la comparación sea un período de estabilidad económica no muy alejado en el pasado. De cuando en cuando puede ser necesario, por tanto, cambiar el período base.

Una posibilidad es recalcular todos los números índice en términos del nuevo período base. Un método aproximado más simple consiste en dividir todos los números índice para los diversos años correspondientes al período base antiguo por los números índice correspondientes al nuevo período base, expresando los resultados como porcentajes. Estos resultados representan los nuevos números índice, siendo el número índice para el nuevo período base 100(%), como debe ser.

Matemáticamente hablando, este método es estrictamente aplicable sólo si los números índice satisfacen el *criterio circular* (véase Prob. 19.37). Sin embargo, para muchos tipos de índices el método, afortunadamente, da resultados que en la práctica son suficientemente próximos a los que se obtendrían teóricamente.

## DEFLACION DE SERIES EN EL TIEMPO

Aunque los ingresos de las personas pueden estar creciendo teóricamente durante un cierto número de años, sus *ingresos reales* pueden en verdad estar disminuyendo debido al aumento del coste de la vida, en tanto en cuanto este aumento del coste de la vida hace que disminuya su *poder adquisitivo*.



Calculamos los ingresos reales dividiendo los *ingresos aparentes* de cada año por el número índice del coste de la vida en ese año, usando un período base adecuado. Por ejemplo, si los ingresos de un individuo en 1980 son el 150% de sus ingresos en 1970 (o sea, han crecido un 50%) y el coste de la vida se ha doblado en ese mismo período de tiempo, entonces sus ingresos reales en 1980 son sólo del  $\frac{150}{2} = 75\%$  de lo que eran en 1970.

El párrafo anterior describe el proceso de deflación de una serie en el tiempo referida a ingresos de una persona. Un procedimiento análogo se sigue para la deflación de otras series en el tiempo. Así, en el Capítulo 18 usamos un procedimiento similar para *desestacionalizar* datos mediante números índice estacionales.

En términos matemáticos, este método de deflación de series en el tiempo es estrictamente aplicable sólo si los números índice cumplen el *criterio de inversión de factores*, y por esta razón el índice ideal de Fisher es adecuado. No obstante, otros números índice dan también resultados correctos a efectos prácticos.

## PROBLEMAS RESUELTOS

### RELACIONES DE PRECIOS

19.1. Los precios al por menor (en centavos por libra) del cinc en EE. UU. durante 1978-1984 se ven en la Tabla 19.1.

- (a) Con 1978 como base, hallar las relaciones de precios correspondientes a los años 1983 y 1984.
- (b) Con 1980 como base, hallar las relaciones de precios correspondientes a los años dados.
- (c) Usando 1978-1980 como período base, hallar las relaciones de precios correspondientes a los años dados.

Tabla 19.1

Año	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Precio promedio del cinc al por menor	31.0	37.3	37.4	44.6	38.5	41.4	48.6

Fuente: U.S. Bureau of Mines.

### Solución

(a) La relación de precios para 1982 con 1978 como base es

$$P_{1978|1982} = \frac{\text{precio en 1982}}{\text{precio en 1978}} = \frac{38.5}{31.0} = 1.242 = 124.2\%$$

La relación de precios para 1984 con 1978 como base es

$$P_{1978|1984} = \frac{\text{precio en 1984}}{\text{precio en 1978}} = \frac{48.6}{31.0} = 1.568 = 156.8\%$$

En la literatura estadística es usual omitir los símbolos % al citar los números índice, quedando sobreentendidos. Usando ese convenio, citamos las relaciones de precios anteriores como 124.2 y 156.8 respectivamente.

- (b) Dividimos cada precio al por menor en la Tabla 19.1 por 37.4 (centavos por libra), el precio del año 1980; así pues, las relaciones de precios pedidas, expresadas en porcentajes, se indican en la Tabla 19.2. Representan los *números índice* de los precios del cinc al por menor para los años 1978-1984, y la colección completa se llama una *serie de índices*. Obsérvese que la relación de precios (o número índice de precios) del año 1980 es en porcentaje 100.0, como ocurre siempre para el período base. Esto se suele escribir simbólicamente en estadística como  $1980 = 100$ .

Tabla 19.2

Año	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Relación de precios (1980 = 100)	82.9	99.7	100.0	119.3	102.9	110.7	129.9

- (c) La media aritmética de los precios para los años 1978-1980 es  $\frac{1}{3}(31.0 + 37.3 + 37.4) = 35.2$ . Dividamos cada precio al por menor de la Tabla 19.1 por ese precio promedio del período base de 35.2 (centavos por libra). Las requeridas relaciones de precios, en forma de porcentajes, se recogen en la Tabla 19.3. Representan los números índice de precios del cinc para los años 1978-1984 con 1978-1980 como período base. Nótese que la media aritmética de los números índice correspondientes al período base 1978-1980 es  $\frac{1}{3}(88.1 + 106.0 + 106.3) = 100.1$ , o sea 100.0 (la ligera discrepancia se debe a errores de redondeo), como ocurre siempre para el período base. Esto se escribe a veces simbólicamente como  $1978-1980 = 100$ .

Tabla 19.3

Año	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
Relación de precios (1978-1980 = 100)	88.1	106.0	106.3	126.7	109.4	117.6	138.1

- 19.2. Probar (a) que  $p_{a|b}p_{b|c} = p_{a|c}$  y (b) que  $p_{a|b}p_{b|a} = 1$ .

### Solución

Por la definición, basta ver que

$$(a) \quad p_{a|b}p_{b|c} = \frac{p_b}{p_a} \cdot \frac{p_c}{p_b} = \frac{p_c}{p_a} = p_{a|c}$$

$$(b) \quad p_{a|b}p_{b|a} = \frac{p_b}{p_a} \cdot \frac{p_a}{p_b} = 1$$

- 19.3. Con la Tabla 19.3, que usa 1978-1980 como período base, hallar las relaciones de precios con 1980 como base.

**Solución**

Dividimos cada relación de precios de la Tabla 19.3 por la relación de precios 106.3. Los números resultantes, expresados como porcentajes, son las relaciones de precios requeridas, y se muestran en la Tabla 19.2 (aparte errores de redondeo).

Esta solución demuestra que, dada una serie de índices correspondiente a un periodo base, podemos hallar la serie de índices correspondiente a otro periodo base sin hacer uso de los datos originales sobre precios. El método implicado se llama *cambio de periodo base*, o *desplazamiento de la base*. Para una demostración de este método, ver el Problema 19.36.

- 19.4. En 1986 el precio medio de un artículo era un 20% más que en 1985, 20% menos que en 1984 y 50% más que en 1987. Reducir los datos a relaciones de precios usando (a) 1985, (b) 1986 y (c) 1984-1985 como base.

**Solución**

- (a) La relación de precios (o número índice) con 1985 como base es 100 (simbólicamente, 1985 = 100, o sea 100%).  
 Como el precio en 1986 es 20% más que en 1985, la relación de precios correspondiente a 1986 es  $100 + 20 = 120$ ; esto es, el precio en 1986 es 120% del de 1985.  
 Como el precio en 1986 es 20% menor que en 1984, debe ser el  $100 - 20 = 80\%$  del precio de 1984. Así pues, el precio de 1984 es  $1/0.80 = \frac{5}{4} = 125\%$  del de 1986; es decir,

$$\text{Relación de precios 1984} = 125\% \text{ de la relación de precios 1986} = 125\% \text{ de } 120 = 150$$

Ya que el precio en 1986 es 50% más que en 1987, debe ser  $100 + 50 = 150\%$  del de 1987. Luego el precio de 1987 es  $1/1.50 = \frac{2}{3}$  del de 1986; esto es,

$$\begin{aligned} \text{Relación de precios 1987} &= \frac{2}{3} \text{ de la relación de precios 1986} \\ &= \frac{2}{3} \text{ de } 120 = 80 \end{aligned}$$

Luego las relaciones de precios pedidas con 1985 como base son las que recoge la Tabla 19.4.

- (b) Usamos el método de cambio del periodo base descrito en el Problema 19.3. Dividimos cada relación de precios de la Tabla 19.4 por 120 (la relación de precios del nuevo año base 1986) y expresamos el resultado como porcentaje. Así pues, las relaciones de precios deseadas con 1986 como base, las muestra la Tabla 19.5.

- (c) *Primer método* [usando la parte (a)]

De la Tabla 19.4 vemos que la media aritmética de las relaciones de precios para 1984 y 1985 es  $\frac{1}{2}(150 + 100) = 125$ . Dividiendo cada relación de precios en la Tabla 19.4 por 125, obtenemos las relaciones de precios requeridas, que se muestran en la Tabla 19.6.

*Segundo método* [usando la parte (b)]

Según la Tabla 19.5, la media aritmética de las relaciones de precios para 1984 y 1985 es  $\frac{1}{2}(125 + 83.3) = 104.2$ . Dividiendo cada relación de precios en la Tabla 19.5 por 104.2, obtenemos los mismos resultados que con el primer método.

**Tabla 19.4**

Año	1984	1985	1986	1987
Relación de precios (1985 = 100)	150	100	120	80

Tabla 19.5

Año	1984	1985	1986	1987
Relación de precios (1986 = 100)	125	83.3	100	66.7

Tabla 19.6

Año	1984	1985	1986	1987
Relación de precios (1984-1985 = 100)	120	80	96	64

## RELACIONES DE CANTIDAD O VOLUMEN

19.5. La Tabla 19.7 presenta la producción de trigo (en millones de bushels) en EE. UU. durante 1977-1985. Reducir los datos de la tabla a relaciones de cantidad usando (a) 1982 y (b) 1977-1980 como base.

## Solución

- (a) Dividir las cifras de producción de cada año por 2765 (la producción del año base 1982). Así las requeridas relaciones de cantidad (o números índice de cantidad), expresadas en porcentajes, se muestran en la Tabla 19.8.

Tabla 19.7

Año	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Producción de trigo	2046	1776	2134	2380	2785	2765	2420	2595	2425

Fuente: U.S. Department of Agriculture.

Tabla 19.8

Año	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Relación de cantidad (1982 = 100)	74.0	64.2	77.2	86.1	100.7	100.0	87.5	93.9	87.7

- (b) La media aritmética de producción en los años 1977-1980 es  $\frac{1}{4}(2046 + 1776 + 2134 + 2380) = 2084$ . Dividiendo la producción de cada año por 2084 obtenemos las relaciones de cantidad deseadas, expresadas en porcentajes, que figuran en la Tabla 19.9. Nótese que  $\frac{1}{4}(98.2 + 85.2 + 102.4 + 114.2) = 100.0$ , lo cual sirve de comprobación.

Tabla 19.9

Año	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Relación de cantidad (1977-1980 = 100)	98.2	85.2	102.4	114.2	133.6	132.7	116.1	124.5	116.4

19.6. Mientras la relación de cantidad para 1986 es 105 cuando se toma 1977 como base, es 140 cuando el año base es 1980. Hallar la relación de cantidad para 1980 tomando 1977 como base.

**Solución**

*Primer método*

Por las propiedades de las relaciones de cantidad, tenemos  $q_{ab}q_{bc} = q_{ac}$ . Poniendo  $a = 1977$ ,  $b = 1980$  y  $c = 1986$ , tenemos  $q_{1977|1980} = q_{1977|1986}q_{1986|1980} = (1.05)(1/1.40) = 0.75 = 75\%$ . Luego la relación de cantidad pedida es 75.

*Segundo método*

Sean  $q_{1977}$ ,  $q_{1980}$  y  $q_{1986}$  las cantidades reales en 1977, 1980 y 1986, respectivamente; así pues,

$$\text{Relación de cantidad para 1986 con base 1977} = \frac{q_{1986}}{q_{1977}} = 105\% = 1.05$$

$$\text{Relación de cantidad para 1986 con base 1980} = \frac{q_{1986}}{q_{1980}} = 140\% = 1.40$$

Luego la relación de cantidad para 1980 con 1977 como base es

$$\frac{q_{1980}}{q_{1977}} = \frac{q_{1980}/q_{1986}}{q_{1977}/q_{1986}} = \frac{1/1.40}{1/1.05} = \frac{1.05}{1.40} = 75\%$$

*Tercer método*

Como  $q_{1986} = 1.05q_{1977} = 1.40q_{1980}$ , tenemos  $q_{1980}/q_{1977} = 1.05/1.40 = 75\%$ . Por tanto, la relación de cantidad requerida es 75.

**RELACIONES DE VALOR**

19.7 En enero de 1980 una empresa pagó un total de \$80,000 a 120 empleados en nómina. En julio de ese mismo año, la empresa tenía 30 trabajadores más en nómina y pagó \$12,000 más que en enero.

- (a) Con enero de 1980 como base, hallar el número índice de empleo (la relación de cantidad) para julio.
- (b) Con enero de 1980 como base, hallar el número índice (relación de valor) trabajo-gasto para julio.
- (c) Usando el resultado *relación de precios*  $\times$  *relación de cantidad* = *relación de valor*, ¿qué interpretación se puede dar a la relación de precios en este caso?

**Solución**

(a) El número índice de empleo es

$$\text{Relación de cantidad} = \frac{120 + 30}{120} = 1.25 = 125\% \quad \text{o sea} \quad 125$$

(b) El número índice trabajo-gasto es

$$\text{Relación de valor} = \frac{\$80,000 + \$12,000}{\$80,000} = 1.15 = 115\% \quad \text{o sea} \quad 115$$

(c) La relación de precios es

$$\frac{\text{Relación de valor}}{\text{Relación de cantidad}} = \frac{115}{125} = 0.92 = 92\% \quad \text{o sea} \quad 92$$

Podemos interpretar esto como un *número índice de costo por empleado*. El significado es que en julio de 1980 el costo por empleado era el 92% del de enero de 1980, el periodo base. A veces se llama a esto un número índice de costo laboral *per capita*.

- 19.8. Una compañía espera que sus ventas de un producto crezcan un 50% el año próximo. ¿En qué porcentaje debe aumentar su precio de venta para doblar los ingresos brutos provenientes de ese producto?

**Solución**

Dado que  $\text{Relación de precios} \times \text{relación de cantidad} = \text{relación de valor}$

tenemos  $\text{Relación de precios} \times 150\% = 200\%$

Luego  $\text{Relación de precios} = \frac{200}{150} = \frac{4}{3} = 133\frac{1}{3}\%$

La compañía debe aumentar por tanto el precio de ese producto en un  $133\frac{1}{3} - 100 = 33\frac{1}{3}\%$ .

**RELACIONES DE ENLACE Y EN CADENA**

- 19.9. Sabiendo que las relaciones de enlace para los precios en los años 1981, 1982, ..., 1985 son 125, 120, 135, 150 y 175, respectivamente, (a) hallar la relación de precios para 1982 con 1980 como base y (b) las relaciones de enlace y en cadena con 1981 como base.

**Solución**

Tenemos  $p_{1980|1981} = 1.25$ ,  $p_{1981|1982} = 1.20$ ,  $p_{1982|1983} = 1.35$ ,  $p_{1983|1984} = 1.50$  y  $p_{1984|1985} = 1.75$ . Por tanto:

$$(a) \quad p_{1980|1982} = p_{1980|1981}p_{1981|1982} = (1.25)(1.20) = 1.50 = 150\%$$

$$(b) \quad p_{1981|1980} = \frac{1}{p_{1980|1981}} = \frac{1}{1.25} = 80\%$$

$$p_{1981|1981} = 100\%$$

$$p_{1981|1982} = 120\%$$

$$p_{1981|1983} = p_{1981|1982}p_{1982|1983} = (1.20)(1.35) = 1.62 = 162\%$$

$$p_{1981|1984} = p_{1981|1982}p_{1982|1983}p_{1983|1984} = (1.20)(1.35)(1.50) = 2.43 = 243\%$$

$$p_{1981|1985} = p_{1981|1982}p_{1982|1983}p_{1983|1984}p_{1984|1985} = (1.20)(1.35)(1.50)(1.75) = 4.25 = 425\%$$

**NUMEROS INDICE; EL METODO DE AGREGACION SIMPLE**

- 19.10. La Tabla 19.10 muestra los precios al por mayor y las producciones en EE. UU. de leche, mantequilla y queso para los años 1980, 1981 y 1985. Calcular un índice de precios al por mayor por agregación de esos productos lácteos para el año 1985, tomando como base (a) 1980 y (b) 1980-1981

Tabla 19.10

	Precio (centavos por libra)			Cantidad (millones de libras)		
	1980	1981	1985	1980	1981	1985
Leche	13.23	13.95	12.90	128,500	132,800	143,700
Mantequilla	139.3	148.0	141.1	1,145	1,228	1,248
Queso	156.2	167.2	162.0	2,381	2,664	2,854

Fuente: Survey of Current Business.

**Solución**

(a) El índice de precios por agregación simple es

$$\frac{\sum p_n}{\sum p_o} = \frac{\text{suma de precios en el año prefijado (1985)}}{\text{suma de precios en el año base (1980)}} = \frac{12.90 + 141.1 + 162.0}{13.23 + 139.3 + 156.2} = 102.4(\%)$$

Es decir, el precio promedio al por mayor de esos tres productos en 1985 es el 102.4% del de 1980 (o sea, 2.4% mayor).

(b) El precio promedio (medio) de la leche en el período base 1980-1981 es

$$\frac{1}{2}(13.23 + 13.95) = 13.59¢/lb$$

el precio promedio (medio) de la leche en el período base 1980-1981 es

$$\frac{1}{2}(139.3 + 148.0) = 143.7¢/lb$$

el precio promedio (medio) de la leche en el periodo base 1980-1981 es

$$\frac{1}{2}(156.2 + 167.2) = 161.7¢/lb$$

y por tanto el índice de precios por agregación simple es

$$\frac{\sum p_n}{\sum p_o} = \frac{\text{suma de precios en el año prefijado (1985)}}{\text{suma de precios en el año base (1980-1981)}} = \frac{12.90 + 141.1 + 162.0}{13.59 + 143.7 + 161.7} = 99.1(\%)$$

Nótese que este método no hace uso de las *cantidades* producidas, sino sólo de los precios de los artículos.

A efectos ilustrativos, sólo se han considerado aquí tres artículos, pero en la práctica se incluyen mucho más.

19.11. Explicar por qué los números indice obtenidos en el Problema 19.10 pueden ser medidas inapropiadas de los cambios de precios en los artículos en cuestión.

**Solución**

El índice calculado en el Problema 19.10 no tiene en cuenta la importancia relativa de los productos, tal como quedaría determinada por ejemplo por cuánto los usan los consumidores o cuánto se produce para el consumo. Estas consideraciones se incorporan en problemas posteriores.

- 19.12. La Tabla 19.11 muestra los precios y la producción, en promedio, de algodón y trigo en EE. UU. durante los años 1980 y 1986. Explicar por qué un índice de precios por agregación simple para 1986 con 1980 como base es inapropiado como medida del cambio de precios en esos dos productos.

Tabla 19.11

	Precio		Cantidad*	
	1980	1986	1980	1986
Algodón	74.4¢ (por libra)	56.8¢ (por libra)	11.122 (millones de balas)	13.432 (millones de balas)
Trigo	\$3.91 (por bushel)	\$3.16 (por bushel)	511.4 (millones de bushels)	487.1 (millones de bushels)

\* 1 bala = 480 lb; 1 bushel = 60 lb.

Fuente: Survey of Current Business.

### Solución

Si se usa un índice de precios de agregación simple, el resultado es

$$\frac{\sum p_n}{\sum p_o} = \frac{\text{suma de precios en el año prefijado (1986)}}{\text{suma de precios en el año base (1980)}} = \frac{56.8¢ + 316¢}{74.4¢ + 391¢} = 0.801 = 80.1(\%)$$

indicando que el precio medio de esos productos era en 1986 del orden de un 80% respecto al de 1980. Si expresamos el precio del trigo en centavos por libra, es  $\$3.91/60 = 6.52¢$  lb para 1980 y  $\$3.16/60 = 5.27¢$  para 1986. En este caso el índice de precios por agregación simple es

$$\frac{\sum p_n}{\sum p_o} = \frac{56.8¢ + 5.27¢}{74.4¢ + 6.52¢} = 76.7(\%)$$

Esto ilustra el hecho de que el índice de precios por agregación simple puede ser muy sensible a las unidades utilizadas al anotar los precios; en consecuencia, está claro que da una medida inapropiada en tales casos. Este hecho, junto con la desventaja comentada en el Problema 19.11, dan buenas razones para abandonar su uso en la práctica.

La nota al final del Problema 19.10 se aplica también a este problema.

## EL METODO DEL PROMEDIO SIMPLE DE RELACIONES

- 19.13. Usar el método del promedio simple de relaciones para calcular un índice de precios al por mayor para los productos de la Tabla 19.10 para el año 1985, usando 1980 como base.

### Solución

Las relaciones de precios para la leche, la mantequilla y el queso en 1985 con 1980 como base son como siguen:

$$\text{Relación de precios para la leche} = \frac{\text{precio de la leche en 1985}}{\text{precio de la leche en 1980}} = \frac{12.90}{13.23} = 97.5(\%)$$

$$\text{Relación de precios para la mantequilla} = \frac{\text{precio de la mantequilla en 1985}}{\text{precio de la mantequilla en 1980}} = \frac{141.1}{139.3} = 101.3(\%)$$



$$\text{Relación de precios para el queso} = \frac{\text{precio del queso en 1985}}{\text{precio del queso en 1980}} = \frac{162.0}{156.2} = 103.7(\%)$$

$$\text{Promedio (media) de relaciones de precios} = \frac{\sum P_n/P_o}{N} = \frac{97.5 + 101.3 + 103.7}{3} = 100.8(\%)$$

19.14. Rehacer el Problema 19.13 usando la mediana en lugar de la media.

**Solución**

- (a) Número índice solicitado = mediana de relaciones de precios 97.5, 101.3 y 103.7 = 101.3.
- (b) Número índice solicitado = mediana de relaciones de precios 94.9, 98.2 y 100.2 = 98.2.

19.15. Resolver el Problema 19.13 con la media geométrica en lugar de la media

**Solución**

- (a) Número índice pedido = media geométrica de las relaciones de precios 97.5, 101.3, y 103.7 =  $\sqrt[3]{(97.5)(101.3)(103.7)} = 100.8$ .
- (b) Número índice pedido = media geométrica de las relaciones de precios 94.9, 98.2 y 100.2 =  $\sqrt[3]{(94.9)(98.2)(100.2)} = 97.7$ .

19.16. Usar el promedio simple (media) de las relaciones de precios para obtener un número índice de precios para los artículos de la Tabla 19.11, con 1980 como año base y 1986 como año dado.

**Solución**

$$\text{Relación de precios para el algodón} = \frac{\text{precio del algodón en 1986}}{\text{precio del algodón en 1980}} = \frac{56.8¢}{74.4¢} = 76.3(\%)$$

$$\text{Relación de precios para el trigo} = \frac{\text{precio del trigo en 1986}}{\text{precio del trigo en 1980}} = \frac{\$3.16}{\$3.91} = 80.8(\%)$$

$$\text{Promedio simple (media) de relaciones de precios} = \frac{\sum P_n/P_o}{N} = \frac{76.3 + 80.8}{2} = 78.6(\%)$$

Nótese que el resultado es independiente de las unidades usadas al anotar los precios (comparar con el Problema 19.12).

19.17. Resolver el Problema 19.16 usando la media geométrica.

**Solución**

$$\text{Número índice requerido} = \text{media geométrica de relaciones de precios } 76.3 \text{ y } 78.6 = \sqrt{(76.3)(78.6)} = 77.4(\%)$$

**EL METODO DE AGREGACION PONDERADA; INDICES DE LASPEYRES Y PAASCHE**

19.18. Calcular, con los datos de la Tabla 19.10, un número índice de precios de Laspeyres para 1985 con (a) 1980 y (b) 1980-1981 como base.

**Solución**

- (a) El índice de Laspeyres, el índice de precios por agregación ponderada con las cantidades de período base como pesos, es

$$\begin{aligned}\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} &= \frac{\sum (\text{precios en 1985})(\text{cantidades en 1980})}{\sum (\text{precios en 1980})(\text{cantidades en 1980})} \\ &= \frac{(12.90)(128,500) + (141.1)(1145) + (162.0)(2381)}{(13.23)(128,500) + (139.3)(1145) + (156.2)(2381)} = 0.9881 = 98.8(\%) \end{aligned}$$

- (b) Las cantidades promedio de leche, mantequilla y queso producidas en 1980-1981 son  $\frac{1}{2}(128,500 + 132,800) = 130,650$ ,  $\frac{1}{2}(1145 + 1228) = 1186.5$  y  $\frac{1}{2}(2381 + 2664) = 2522.5$ , respectivamente. Los precios promedio en 1980-1981 se indican en el Problema 19.10(b). Luego el índice de Laspeyres es

$$\begin{aligned}\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} &= \frac{\sum (\text{precios en 1985})(\text{cantidades promedio en 1980-1981})}{\sum (\text{precios en 1980-1981})(\text{cantidades promedio en 1980-1981})} \\ &= \frac{(12.90)(130,650) + (141.1)(1186.5) + (162.0)(2522.5)}{(13.59)(130,650) + (143.7)(1186.5) + (161.7)(2522.5)} = 0.9607 = 96.1(\%) \end{aligned}$$

- 19.19.** Usando los datos de la Tabla 19.10, calcular un número índice de Paasche para 1985 con (a) 1980 y (b) 1980-1981 como base.

**Solución**

- (a) El índice de Paasche, el índice de precios por agregación ponderada con las cantidades del año dado como pesos, es

$$\begin{aligned}\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} &= \frac{\sum (\text{precios en 1985})(\text{cantidades en 1985})}{\sum (\text{precios en 1980})(\text{cantidades en 1985})} \\ &= \frac{(12.90)(130,650) + (141.1)(1186.5) + (162.0)(2522.5)}{(13.59)(130,650) + (143.7)(1186.5) + (161.7)(2522.5)} = 0.9607 = 96.1(\%) \end{aligned}$$

- (b) El índice de Paasche es

$$\begin{aligned}\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} &= \frac{\sum (\text{precios en 1985})(\text{cantidades en 1985})}{\sum (\text{precios en 1980-1981})(\text{cantidades en 1985})} \\ &= \frac{(12.90)(143,700) + (141.1)(1248) + (162.0)(2854)}{(13.59)(143,700) + (143.65)(1248) + (161.7)(2854)} = 0.9609 = 96.1(\%) \end{aligned}$$

- 19.20.** (a) Hallar los números índice de Laspeyres para los datos de la Tabla 19.11.  
 (b) Hallar los números índice de Paasche para los datos de la Tabla 19.11.  
 (c) En la hipótesis de que deban revisarse los números índice cada año, apuntar una ventaja del índice de Laspeyres sobre el de Paasche.

**Solución**

(a) El índice de Laspeyres es

$$\begin{aligned} \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} &= \frac{\sum (\text{precios en 1986})(\text{cantidades en 1980})}{\sum (\text{precios en 1980})(\text{cantidades en 1980})} \\ &= \frac{(56.8¢/\text{lb})(11.122 \times 500 \text{ millones de lb}) + (316¢/\text{bu})(511.4 \text{ millones de bu})}{(74.4¢/\text{lb})(11.122 \times 500 \text{ millones de lb}) + (391¢/\text{bu})(511.4 \text{ millones de bu})} = 87.2(\%) \end{aligned}$$

(b) El índice de Paasche es

$$\begin{aligned} \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} &= \frac{\sum (\text{precios en 1986})(\text{cantidades en 1986})}{\sum (\text{precios en 1980})(\text{cantidades en 1986})} \\ &= \frac{(56.8¢/\text{lb})(13.432 \times 500 \text{ millones de lb}) + (316¢/\text{bu})(487.1 \text{ millones de bu})}{(74.4¢/\text{lb})(13.432 \times 500 \text{ millones de lb}) + (391¢/\text{bu})(487.1 \text{ millones de bu})} = 77.6(\%) \end{aligned}$$

*Nota:* En la práctica, donde ha de calcularse un número índice para muchos artículos, es aconsejable tabular de forma adecuada el cálculo (véase Prob. 19.31 por ejemplo).

(c) Al calcular el índice de Laspeyres, los pesos (o sea, las cantidades producidas o consumidas en el año base, si se calcula un índice de precios) no cambian de año en año, así que la única información que uno precisa es una lista de los últimos precios. Al calcular un índice de Paasche, uno necesita esa información tanto sobre los precios como sobre los pesos (o cantidades); por tanto, calcular un índice de Paasche es más laborioso en cuanto a recolección de datos.

19.21. Interpretar los números índice de (a) Laspeyres y (b) Paasche, en términos del valor total (o coste total) de los artículos.

**Solución**

(a) Al calcular un índice de precios de Laspeyres,  $\sum p_n q_o$  representa el valor total (o coste total) de un conjunto de artículos (a veces llamado la *cesta de la compra*) en el año o periodo base. La cantidad  $\sum p_o q_o$  representa lo mismo en el año o periodo dado. Así pues, un índice de Laspeyres sirve para medir los costes totales en cualquier año dado de una *cesta de la compra fija* adquirida en el año base.

(b) Al calcular un índice de precios de Paasche,  $\sum p_n q_n$  es el valor total (o coste total) de artículos adquiridos en el año dado, suponiendo precios del año base, mientras  $\sum p_o q_n$  es el valor total de artículos adquiridos en el año dado a los precios del año dado. Luego un índice de Paasche sirve para medir el coste total de una cesta de la compra del año dado respecto a cuál sería su coste si su adquisición se hubiera efectuado en el año base.

19.22. Se dice a veces que el índice de precios de Laspeyres tiende a *sobreestimar* los cambios de precios, mientras el de Paasche tiende a *subestimarlos*. Dar posibles argumentos que apoyen tal afirmación.

**Solución**

De acuerdo con la *ley económica de la oferta y la demanda*, la gente tiende a comprar menos cuando los precios son altos y más cuando son bajos. Esta es la llamada *demanda elástica*, válida si se trata de un artículo que no es de primera necesidad.

En el caso del índice de Laspeyres,  $\sum p_n q_o$  será algo mayor de lo que debiera ser, pues por la ley de la oferta y la demanda la gente tenderá a adquirir menos artículos de alto precio y más de bajo precio,

de modo que el coste total sería menor que el que predice  $\sum p_n q_0$ . Así pues, el índice de Laspeyres  $(\sum p_n q_0) / (\sum p_0 q_0)$  tiende a ser mayor de lo que debiera.

En el índice de Paasche, los papeles del año base y del año dado se intercambian respecto del que jugaban en el de Laspeyres. Ello hace que el índice de Paasche tienda a ser menor de lo que debiera.

Los razonamientos anteriores no implican que el índice de Laspeyres sea *siempre* mayor que el de Paasche, sino sólo que *tiende a ser mayor*. En la práctica, el índice de Laspeyres puede ser mayor, igual o menor que el de Paasche. (Véanse Probs. 19.18 y 19.19, en los que el índice de Laspeyres es de hecho menor que el de Paasche.)

- 19.23. Probar que los números índice de precios de agregación ponderada con pesos (cantidades) fijos satisfacen el criterio circular.

#### Solución

Denotando por  $q_0$  los pesos fijos, tenemos para cualesquiera periodos  $a$ ,  $b$  y  $c$ , los números índice

$$I_{a|b} = \frac{\sum p_b q_0}{\sum p_a q_0} \quad \text{y} \quad I_{b|c} = \frac{\sum p_c q_0}{\sum p_b q_0}$$

Entonces 
$$I_{a|b} I_{b|c} = \frac{\sum p_b q_0}{\sum p_a q_0} \cdot \frac{\sum p_c q_0}{\sum p_b q_0} = \frac{\sum p_c q_0}{\sum p_a q_0} = I_{a|c}$$

que demuestra que el criterio circular se verifica.

Los números índice de Laspeyres y de Paasche no cumplen el criterio circular.

### INDICE IDEAL DE FISHER

- 19.24. Probar que el índice ideal de Fisher es la media geométrica de los números índice de Laspeyres y de Paasche.

#### Solución

Si  $F$ ,  $L$  y  $P$  denotan respectivamente los índices de Fisher, Laspeyres y Paasche, tenemos

$$F = \sqrt{\left( \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} \right) \left( \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} \right)} = \sqrt{LP}$$

según la definición de  $L$  y  $P$ . Como  $\sqrt{LP}$  es la media geométrica de  $L$  y  $P$ , eso concluye la demostración.

- 19.25. Probar que el índice ideal de Fisher está entre los números índice de Laspeyres y de Paasche.

#### Solución

Esto se sigue directamente de que  $F = \sqrt{LP}$  está entre  $L$  y  $P$ , pues  $L$  y  $P$  son positivos. Nótese que si  $L = P$ , entonces  $F = L = P$ .

Como por el Problema 19.22  $L$  tiende a *sobreestimar* los cambios de precios y  $P$  tiende a *subestimarlos*, se deduce que  $F$ , que está entre ambos, debe producir una estimación más correcta que  $L$  o  $P$ .

- 19.26. Hallar el índice ideal de Fisher para los productos de la Tabla 19.10 para el año 1985, con (a) 1980 y (b) 1980-1981 como base.

**Solución**

(a) Por los Problemas 19.18(a) y 19.19(a),

$$F = \sqrt{LP} = \sqrt{(0.9881)(0.9886)} = 0.9883 = 98.8(\%)$$

(b) Por los problemas 19.18(b) y 19.19(b),

$$F = \sqrt{LP} = \sqrt{(0.9607)(0.9609)} = 0.9608 = 96.1(\%)$$

19.27. Hallar el índice ideal de Fisher para los datos de la Tabla 19.11.

**Solución**

Del Problema 19.20,  $F = \sqrt{LP} = \sqrt{(0.9881)(0.776)} = 0.823 = 82.3(\%)$ . Nótese que una buena aproximación a  $\sqrt{LP}$ , cuando  $L$  y  $P$  son casi iguales, viene dada por  $(L + P)/2$ . Esta media aritmética de  $L$  y  $P$  puede usarse como definición de un nuevo número índice que está entre  $L$  y  $P$ .

19.28. Demostrar que el índice ideal de Fisher satisface el criterio de inversión temporal.

**Solución**

Denotemos por  $F_{o|n}$  el índice ideal de Fisher para un año dado con respecto a un año base, y sea  $F_{n|o}$  el índice ideal de Fisher cuando el año dado y el año base se intercambian. Entonces el criterio de inversión temporal se satisface si

$$F_{o|n} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}\right)}$$

Entonces

$$F_{n|o} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_o q_n}{\sum p_n q_n}\right) \left(\frac{\sum p_o q_o}{\sum p_n q_o}\right)}$$

y

$$F_{o|n} F_{n|o} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}\right) \left(\frac{\sum p_o q_n}{\sum p_n q_n}\right) \left(\frac{\sum p_o q_o}{\sum p_n q_o}\right)} = 1$$

**EL INDICE DE MARSHALL-EDGEWORTH**

19.29. Calcular el índice de precios de Marshall-Edgeworth para los datos del Problema 19.10.

**Solución**

El índice de Marshall-Edgeworth es

$$\frac{\sum p_n(q_o + q_n)}{\sum p_o(q_o + q_n)} = \frac{\sum (\text{precios en 1985})(\text{suma de cantidades en 1980 y 1985})}{\sum (\text{precios en 1980})(\text{suma de cantidades en 1980 y 1985})}$$

$$= \frac{(12.90)(128,500 + 143,700) + (141.1)(1145 + 1228) + (162.0)(2381 + 2854)}{(13.23)(128,500 + 143,700) + (139.3)(1145 + 1228) + (156.2)(2381 + 2854)}$$

$$= 0.9884 = 98.8(\%)$$

Obsérvese que está entre los números índice de Laspeyres y Paasche (véase Prob. 19.20). Para una demostración de que ese es siempre el caso, véase el Problema 19.30.

- 19.30. (a) Demostrar que si  $X_1/X_2 < Y_1/Y_2$ , entonces  $X_1/X_2 < (X_1 + Y_1)/(X_2 + Y_2) < Y_1/Y_2$ , donde  $X_1, X_2$  e  $Y_1, Y_2$  son números positivos arbitrarios.  
 (b) Usar el resultado de la parte (a) para probar que el índice de Marshall-Edgeworth está entre los de Laspeyres y Paasche.

**Solución**

(a) Si  $X_1/X_2 < Y_1/Y_2$ , entonces  $X_1Y_2 < X_2Y_1$  (18)

Sumando  $X_1X_2$  a ambos lados de la ecuación (18), se tiene

$$X_1X_2 + X_1Y_2 < X_1X_2 + X_2Y_1 \quad \text{o sea} \quad X_1(X_2 + Y_2) < X_2(X_1 + Y_1)$$

es decir 
$$\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} \quad (19)$$

dividiendo ambos lados por  $X_2(X_2 + Y_2)$ . Sumando  $Y_1Y_2$  a ambos lados de la ecuación (18), tenemos

$$X_1Y_2 + Y_1Y_2 < X_2Y_1 + Y_1Y_2 \quad \text{o sea} \quad Y_2(X_1 + Y_1) < Y_1(X_2 + Y_2)$$

es decir 
$$\frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2} \quad (20)$$

dividiendo ambos miembros por  $Y_1(X_1 + Y_1)$ .

El resultado anunciado se sigue de las ecuaciones (19) y (20).

- (b) **Caso 1** (el índice de Laspeyres es menor que el de Paasche)

Sean  $X_1 = \sum p_n q_o$ ,  $X_2 = \sum p_o q_o$ ,  $Y_1 = \sum p_n q_n$  e  $Y_2 = \sum p_o q_n$ . Luego  $X_1/X_2 < Y_1/Y_2$ , y por tanto de la parte (a) se sigue

$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n q_o + \sum p_n q_n}{\sum p_o q_o + \sum p_o q_n} < \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}$$

o sea 
$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n(q_o + q_n)}{\sum p_o(q_o + q_n)} < \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}$$

es decir índice de Laspeyres < índice de Marshall-Edgeworth < índice de Paasche

**Caso 2** (el índice de Paasche es menor que el de Laspeyres)

Sean  $X_1 = \sum p_n q_n$ ,  $X_2 = \sum p_o q_n$ ,  $Y_1 = \sum p_n q_o$  e  $Y_2 = \sum p_o q_o$ . Luego  $X_1/X_2 < Y_1/Y_2$ , luego por la parte (a) tenemos

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} < \frac{\sum p_n q_n + \sum p_n q_o}{\sum p_o q_n + \sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}$$

es decir 
$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} < \frac{\sum p_n(q_o + q_n)}{\sum p_o(q_o + q_n)} < \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}$$

o sea índice de Paasche < índice de Marshall-Edgeworth < índice de Laspeyres

Se sigue de los Casos 1 y 2 que, independientemente de que el índice de Laspeyres sea mayor que el de Paasche, el índice de Marshall-Edgeworth está entre ellos dos.

**EL METODO DEL PROMEDIO PONDERADO DE RELACIONES**

19.31. Calcular una media aritmética ponderada de las relaciones de precios para los datos de la Tabla 19.11, usando como pesos (a) los valores del año dado y (b) los valores del año base, siendo 1985 el año dado y 1980 el año base.

**Solución**

(a) Usandó como pesos los valores para el año dado, la media aritmética ponderada de las relaciones de precios es

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_nq_n)}{\sum p_nq_n} = \frac{\sum (\text{relaciones de precios})(\text{valores del año prefijado})}{\sum (\text{valores del año prefijado})}$$

El cálculo lo resume la Tabla 19.12, donde el subíndice *n* se refiere al año dado 1985, y el subíndice *o* al año base 1980; y donde *p* y *q* denotan precios y cantidades, respectivamente.

**Tabla 19.12**

	<i>p<sub>o</sub></i>	<i>p<sub>n</sub></i>	<i>q<sub>n</sub></i>	<i>p<sub>n</sub>q<sub>n</sub></i>	<i>p<sub>n</sub>q<sub>n</sub></i> (millones de dólares)	<i>(p<sub>n</sub>/p<sub>o</sub>)(p<sub>n</sub>q<sub>n</sub>)</i> (millones de dólares)
Algodón	74.4¢ (por libra)	56.8¢ (por libra)	13.432 × 480 (millones de libras)	0.7634	3662.1	2795.6
Trigo	\$3.91 (por bushel)	\$3.16 (por bushel)	487.1 (millones de bushels)	0.8082	1539.2	1244.0
					$\sum p_nq_n = 5201.3$	$\sum (p_n/p_o)(p_nq_n) = 4039.6$

Así pues, el número índice pedido es

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_nq_n)}{\sum p_nq_n} = \frac{4039.6}{5201.3} = 77.7(\%)$$

(b) Con los valores del año base como pesos, la media aritmética ponderada de las relaciones de precios es

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_oq_o)}{\sum p_oq_o} = \frac{\sum p_nq_o}{\sum p_oq_o} = \text{índice de Laspeyres del Problema 19.20(a)} = 87.2 (\%)$$

Se puede presentar el cálculo en una tabla como en (a).

## NUMEROS INDICE DE CANTIDAD O VOLUMEN

- 19.32. Usando los datos de la Tabla 19.11, calcular un índice de volumen para 1986 con año base 1980 mediante (a) una media aritmética simple de relaciones de volumen, (b) un índice de volumen de agregación ponderada con los precios del año base como pesos y (c) ídem con los precios del año dado como pesos.

**Solución**

- (a) El índice de una media aritmética simple de relaciones de volumen es

$$\frac{\sum (q_n/q_o)}{N} = \frac{13.432/11.122 + 487.1/511.4}{2} = \frac{120.8(\%) + 95.2(\%)}{2} = 108.0(\%)$$

- (b) El índice de volumen de agregación ponderada con los precios del año base como pesos es

$$\begin{aligned} \frac{\sum q_n p_o}{\sum q_o p_o} &= \frac{\sum (\text{cantidades en 1986})(\text{precios en 1980})}{\sum (\text{cantidades en 1980})(\text{precios en 1980})} \\ &= \frac{(13.432 \times 480 \text{ millones de lb})(74.4\text{¢/lb}) + (487.1 \text{ millones de bu})(391\text{¢/bu})}{(11.122 \times 480 \text{ millones de lb})(74.4\text{¢/lb}) + (511.4 \text{ millones de bu})(391\text{¢/bu})} = 112.2(\%) \end{aligned}$$

Esto se llama a veces *número índice de cantidad (o volumen) de Laspeyres*.

- (c) El índice de volumen de agregación ponderada con los precios del año dado como pesos es

$$\begin{aligned} \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_o p_n} &= \frac{\sum (\text{cantidades en 1986})(\text{precios en 1986})}{\sum (\text{cantidades en 1980})(\text{precios en 1986})} \\ &= \frac{(13.432 \times 480 \text{ millones de lb})(56.8\text{¢/lb}) + (487.1 \text{ millones de bu})(316\text{¢/bu})}{(11.122 \times 480 \text{ millones de lb})(56.8\text{¢/lb}) + (511.4 \text{ millones de bu})(316\text{¢/bu})} = 111.9(\%) \end{aligned}$$

- 19.33. A partir de los resultados del Problema 19.32, determinar el índice ideal de Fisher de volumen (o cantidad).

**Solución**

Al igual que el de precios, el índice ideal de Fisher de volumen viene dado por la media geométrica de los números índice de volumen de Laspeyres y Paasche. Luego, por el Problema 19.32,

$$\text{índice ideal de Fisher de volumen} = \sqrt{(112.2)(111.9)} = 112.0(\%)$$

## NUMEROS INDICE DE VALOR

- 19.34. Probar que el índice ideal de Fisher satisface el criterio de inversión de factores.

**Solución**

Dicho criterio se satisface si el índice es tal que

$$\text{Índice de valor} = (\text{índice de precios})(\text{índice de cantidad})$$

Sean  $F_P$  y  $F_Q$  índices ideales de Fisher de precios y de cantidad, respectivamente. Entonces



$$\text{Indice de valor} = F_p F_Q = \sqrt{\left(\frac{\sum P_n Q_o}{\sum P_o Q_o}\right)\left(\frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o Q_n}\right)} \sqrt{\left(\frac{\sum Q_n P_o}{Q_o P_o}\right)\left(\frac{\sum Q_n P_n}{Q_o P_n}\right)} = \frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o Q_o}$$

y por tanto el índice ideal de Fisher verifica el criterio de inversión de factores.

19.35. Calcular el índice de valor en el Problema 19.34 para los datos de la Tabla 19.11.

**Solución**

Como el resultado

$$\text{Indice de valor} = (\text{índice de precios})(\text{índice de cantidad})$$

vale exactamente cuando se usa el índice ideal de Fisher, de los Problemas 19.27 y 19.33 obtenemos

$$\text{Indice de valor} = (82.3\%)(112.0\%) = 92.2\%$$

Este resultado se puede obtener también por sustitución directa en  $\frac{\sum P_n Q_n}{\sum P_o Q_o}$ .

**CAMBIO DEL PERIODO BASE EN LOS NUMEROS INDICE**

19.36. Establecer la validez del método del Problema 19.3 para hallar relaciones de precios para un nuevo período base.

**Solución**

Numeramos los periodos sucesivamente de 1 a N, como en la primera fila de la Tabla 19.13, y denotamos por  $p_1, p_2, \dots, p_N$  los precios en esos periodos, como en la segunda fila de la tabla. Las relaciones de precios para los periodos  $j$  y  $k$ , que llamaremos período viejo y nuevo respectivamente, se indican en las filas tercera y cuarta de esa tabla; aquí  $p_{j|1} = p_1/p_j, p_{j|2} = p_2/p_j$ , etc. Es claro que la cuarta fila se puede obtener de la tercera dividiendo cada entrada de la tercera por  $p_{j|k}$  (o sea, la relación de precios del período  $k$  respecto al período  $j$  tomando como base); por ejemplo,

$$\frac{p_{j|1}}{p_{j|k}} = \frac{p_1/p_j}{p_k/p_j} = \frac{p_1}{p_k} = p_{k|1} \quad \text{etc.}$$

Los resultados se aplican a relaciones de cantidad y de valor además de a las de precios.

**Tabla 19.13**

Período	1	2	3	...	$j$	...	$k$	...	$N$
Precio	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_j$	...	$p_k$	...	$p_{j N}$
Relación de precios correspondiente al antiguo período $j$	$p_{j 1}$	$p_{j 2}$	$p_{j 3}$	...	100%	...	$p_{j k}$	...	$p_{j N}$
Relación de precios correspondiente al nuevo período $k$	$p_{k 1}$	$p_{k 2}$	$p_{k 3}$	...	$p_{k j}$	...	100%	...	$p_{k N}$

19.37. Demostrar que el método del Problema 19.36 para cambiar el período base de los números índice es aplicable si y sólo si los números índice satisfacen el criterio circular.

**Solución**

Si denotamos los números índice para los diversos periodos, con el período  $j$  como base, por

$$I_{j|1}, I_{j|2}, \dots, I_{j|N} \quad (21)$$

y los correspondientes números índice, con el período  $k$  como base, por

$$I_{k|1}, I_{k|2}, \dots, I_{k|N} \quad (22)$$

obtendremos la sucesión (22) dividiendo cada miembro de (21) por  $I_{j|k}$  si y sólo si

$$\frac{I_{j|1}}{I_{j|k}} = I_{k|1}, \frac{I_{j|2}}{I_{j|k}} = I_{k|2}, \dots$$

o sea

$$I_{j|1} = I_{j|k}I_{k|1}, I_{j|2} = I_{j|k}I_{k|2}, \dots$$

lo cual implica que los números índice satisfacen el criterio circular.

Como los índices de Laspeyres, Paasche, Fisher y Marshall-Edgeworth no lo satisfacen, el método en cuestión para cambiar el período base no se les aplica exactamente. Sin embargo, se aplica con buena aproximación en la práctica.

Los números índice por agregación ponderada con pesos fijos satisfacen el criterio circular (véase Problema 19.23). Para ellos sí se aplica exactamente el método expuesto de cambio de base.

- 19.38.** La Tabla 19.14 muestra el índice de producción industrial para todos los productos manufacturados en EE. UU. en los años 1974-1985 con 1977 como período base. Hallar un nuevo índice con (a) 1979 y (b) 1974-1976 como base.

**Tabla 19.14**

Año	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Índice de producción industrial (1977 = 100)	93	85	93	100	107	111	109	111	103	109	122	125

Fuente: Survey of Current Business.

**Solución**

- (a) Dividimos cada índice de la Tabla 19.14 por 111 (el índice correspondiente a 1979) y expresamos el resultado como porcentaje. Los números índice requeridos, con 1979 como base, se muestran en la Tabla 19.15.
- (b) El índice promedio para los años 1974-1985 con 1974-1976 como base es  $\frac{1}{3}(93 + 85 + 93) = 90.33$ . Dividiendo cada índice de la Tabla 19.14 por 90.33 pedidos, que recoge la Tabla 19.16. Nótese que el índice promedio para el nuevo período base, 1974-1976, es  $\frac{1}{3}(103 + 94 + 103) = 100$ , como tenía que ser.

**Tabla 19.15**

Año	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Índice de producción industrial (1979 = 100)	84	77	84	90	96	100	98	100	93	98	100	113

**Tabla 19.16**

Año	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Índice de producción industrial (1974-1976 = 100)	103	94	103	111	118	123	121	123	114	121	135	138

**DEFLACION DE SERIES EN EL TIEMPO**

**19.39.** La Tabla 19.17 muestra el salario semanal medio de los trabajadores en el comercio minorista de EE.UU. durante 1973-1983. También contiene el índice de precios al consumo para esos años, con 1972 como base. En términos del salario medio de 1973, determinar sus salarios reales en los años 1973-1983.

**Tabla 19.17**

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Salario semanal promedio de los trabajadores (dólares)	96.32	102.68	108.86	114.60	121.66	130.20	138.62	147.38	158.03	163.85	171.05
Índice de precios al consumo (1972 = 100)	106.2	117.9	128.7	136.1	144.9	155.9	173.5	197.0	217.4	230.7	238.1

Fuente: U.S. Department of Labor.

**Solución**

Hallamos primero un número índice de precios al consumo con 1973 como base, dividiendo todos los números de la fila de abajo en la Tabla 19.17 por 106.2 y expresando el resultado en porcentajes. Así se llega a la fila central de la Tabla 19.18. Ahora dividimos cada salario medio para los años dados (fila central de la Tabla 19.17) por el correspondiente número índice (fila central de la Tabla 19.18) para obtener los salarios reales (fila inferior de la Tabla 19.18).

Así, por ejemplo, el salario real correspondiente a 1983 es  $171.05/224.2(\%) = \$76.29$ . Se sigue que aunque los salarios aparentes casi se doblaron desde 1973 hasta 1983, los salarios reales han ido decreciendo con los años; de hecho, el salario real en 1983 venía a ser 20\$ menor que el de 1973. En otras palabras, el poder adquisitivo de los trabajadores decreció aproximadamente en un  $20/96.32 = 21\%$ .

**Tabla 19.18**

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Índice de precios al consumo (1973 = 100)	100.0	111.0	121.2	128.2	136.4	146.8	163.4	185.5	204.7	217.2	224.2
Salario semanal real de los trabajadores (dólares)	96.32	92.50	89.82	89.39	89.19	88.69	84.83	79.45	77.20	75.44	76.29

**19.40.** Usar el índice de precios al consumo de la Tabla 19.18 para determinar el poder adquisitivo del dólar en los diversos años, respecto del valor adquisitivo de un dólar en 1973.

**Solución**

Dividiendo \$1.00 por cada índice de precios de la fila central de la Tabla 19.18, se deduce la Tabla 19.19, que muestra el poder adquisitivo de un dólar de 1973 en los años siguientes. En 1983, por ejemplo, la entrada 0.45 significa que un dólar de 1983 permitía comprar sólo un 45% de lo que permitía uno de 1973; esto es, el dólar valía \$0.45 en términos del dólar de 1973.

Los datos expresados en términos del valor del dólar en algún período específico de tiempo se dicen expresados en *dólares constantes* (con el periodo dado como base o referencia).

**Tabla 19.19**

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Poder adquisitivo del dolar en dólares de 1973	1.00	0.90	0.83	0.78	0.73	0.68	0.61	0.54	0.49	0.46	0.45

Por cada dólar cobrado en 1973, un trabajador debiera haber cobrado  $\$1.00/0.45 = \$2.22$  en 1983 para compensar la inflación. Dicho de otro modo, en dólares constantes de 1973 los trabajadores cobraron \$96.32 en 1973, \$92.50 en 1974, \$89.82 en 1975, ..., y \$76.29 en 1983, como se ve en la Tabla 19.18.

**PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS****RELACIONES DE PRECIOS**

**19.41.** La Tabla 19.20 muestra los precios medios al por mayor de los huevos en EE.UU. durante 1978-1985. Hallar la relación de precios (a) para 1984 con 1978 como base, (b) para 12 como base y (c) para

**19.42.** Probar (a) que  $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|a} = 1$  y (b) que  $p_{a|b}p_{b|c}p_{c|d} = p_{a|d}$ .

**19.43.** Probar que  $p_{o|n} = p_{o|1}p_{1|2}p_{2|3} \cdots p_{(n-1)|n}$ .

**19.44.** Demostrar que la propiedad circular modificada se sigue directamente de la propiedad circular y de la de inversión temporal.

**19.45.** La tabla 19.21 recoge las relaciones de precios de un artículo con 1977-1979 = 100. Determinar las relaciones de precios con (a) 1980 = 100 y (b) 1983-1984 = 100.

**Tabla 19.20**

Año	Precio medio de los huevos (centavos por docena)
1978	60.3
1979	66.2
1980	62.8
1981	69.0
1982	66.8
1983	72.7
1984	78.6
1985	63.4

**Tabla 19.21**

Año	Relación de precios (1977-1979 = 100)
1980	127
1981	134
1982	118
1983	125
1984	137
1985	141

Fuente: U.S. Department of Agriculture.

19.46. La relación de precios para 1984 con 1986 como base es  $62\frac{1}{2}$ , mientras que la de 1985 con 1984 como base es  $133\frac{1}{3}$ . Hallar la relación de precios para el año 1986 con (a) 1985 y (b) 1984-1985 como base.

19.47. En 1980 el precio medio de un producto decreció un 25% de su valor en 1976, pero creció un 50% de su valor en 1972. Hallar la relación de precios para (a) 1976 y (b) 1980 con 1972 como base.

**RELACIONES DE CANTIDAD O VOLUMEN**

19.48. La Tabla 19.22 muestra la energía eléctrica, en miles de millones de kilovatios-hora (kwh) de consumo doméstico, durante los años 1975-1986. Reducir los datos a relaciones de cantidad con (a) 1981 y (b) 1975-1977 como base.

**Tabla 19.22**

Año	Energía eléctrica (miles de millones de kWh)
1975	1.918
1976	2.038
1977	2.124
1978	2.206
1979	2.247
1980	2.286
1981	2.295
1982	2.241
1983	2.310
1984	2.416
1985	2.470
1986	2.512

Fuente: Survey of Current Business.

19.49. En 1984 la producción de un mineral creció un 40% sobre la de 1983. En 1985 la producción estaba un 20% por debajo de la de 1984, pero un  $16\frac{2}{3}\%$  por encima de la de 1986. Hallar las relaciones de precios para los años 1983-1986 con (a) 1983, (b) 1986 y (c) 1983-1986 como base.

19.50. Si la producción del mineral del Problema 19.49 era de 3.20 millones de toneladas cor-

tas en 1985, determinar la producción en (a) 1983, (b) 1984 y (c) 1986.

**RELACIONES DE VALOR**

19.51. En 1985 el precio de un producto creció un 50% sobre el de 1978 y su producción decreció un 30%. En 1985, ¿en qué porcentaje creció o decreció el valor total en dólares de ese producto con respecto a su valor en 1978?

19.52. La Tabla 19.23 muestra las relaciones de valor y de precios de un artículo en los años 1982-1986, con los períodos indicados como base. Hallar las relaciones de cantidad para ese artículo con (a) 1982 y (b) 1982-1984 como base. Interpretar los resultados.

**Tabla 19.23**

Año	Relación de precios (1982 = 100)	Relación de valor (1973-1975 = 100)
1982	100	150
1983	125	180
1984	150	207
1985	175	231
1986	200	252

**RELACIONES DE ENLACE Y EN CADENA**

19.53. Las relaciones de enlace para el consumo de un producto en los años 1982-1985 fueron 90, 120, 125 y 80, respectivamente.

- (a) Hallar la relación de precios para 1983 con 1985 como base.
- (b) Encadenar las relaciones de enlace a una base 1984.
- (c) Encadenar las relaciones de enlace a una base 1982-1983.

19.54. Al final del primero de  $n$  años sucesivos, la producción de un artículo de consumo era de  $A$  unidades. En cada año sucesivo la producción aumentó un  $r\%$  sobre la del año precedente.

- (a) Probar que la producción durante el  $n$ -ésimo año fue de  $A(1 + r/100)^{n-1}$  unidades.

- (b) Probar que la producción total de los  $n$  años fue de  $(100A/r)[(1+r/100)^n - 1]$  unidades.

### NUMEROS INDICE; EL METODO DE AGREGACION SIMPLE

- 19.55. La Tabla 19.24 muestra los precios y cantidades de consumo en EE. UU. de varios metales para los años 1975 y 1984. Tomando 1975 como base, calcular un índice de precios para el año 1984 por el método de agregación simple.

Tabla 19.24

	Precio (centavos por libra)		Cantidad (millones de libras)	
	1975	1984	1975	1984
Cobre	64.2	66.8	3440	2406
Plomo	21.5	25.6	1144	710
Estaño	339.8	623.8	49.4	42.8
Cinc	39.0	48.6	1068	558

Fuente: U.S. Department of the Interior, Bureau of Mines.

- 19.56. Demostrar que el número índice por agregación simple satisface el criterio de inversión temporal y circular, pero no el de inversión de factores.

### EL METODO DEL PROMEDIO SIMPLE DE RELACIONES

- 19.57. De los datos de la Tabla 19.24 del Problema 19.55, obtener un índice de precios de esos metales para 1984 con 1975 como año base, mediante un promedio simple (media) de las relaciones de precios. Comparar los resultados con los del Problema 19.55.
- 19.58. Rehacer el Problema 19.57 usando la mediana.
- 19.59. Rehacer el Problema 19.57 usando la media geométrica.
- 19.60. Rehacer el Problema 19.57 usando la media armónica.

### EL METODO DE AGREGACION PONDERADA; INDICES DE LASPEYRES Y PAASCHE

- 19.61. De los datos de la Tabla 19.24, obtener un índice de precios de Laspeyres para 1984 con 1975 como año base.
- 19.62. De los datos de la Tabla 19.24, obtener un índice de precios de Paasche para 1984 con 1975 como año base.
- 19.63. Probar que los índices de (a) Laspeyres y (b) Paasche no satisfacen los criterios de inversión temporal y de inversión de factores.

### INDICE IDEAL DE FISHER

- 19.64. Obtener, de los datos de la Tabla 19.24, un índice ideal de Fisher para 1984 con 1975 como año base.
- 19.65. Probar que el índice ideal de Fisher no cumple el criterio circular.

### EL INDICE DE MARSHALL-EDGEWORTH

- 19.66. A partir de los datos de la Tabla 19.24, obtener el índice de precios de Marshall-Edgeworth para 1984 con 1975 como base.
- 19.67. Probar que el índice de Marshall-Edgeworth satisface el criterio de inversión temporal pero no el de inversión de factores.

### EL METODO DEL PROMEDIO PONDERADO DE RELACIONES

- 19.68. Obtener, de los datos de la Tabla 19.24, el número índice de promedio ponderado de relaciones para 1984 con 1975 como año base, usando como pesos (a) valores del año dado y (b) valores del año base.

### NUMEROS INDICE DE CANTIDAD O VOLUMEN

- 19.69. De los datos de la Tabla 19.24, calcular índices de cantidad para 1984 con 1975 como base, usando (a) la media aritmética simple de las relaciones de cantidad, (b) la media geométrica simple de las relaciones de cantidad, (c) un índice de cantidad de

promedio ponderado con los precios del año base como pesos (número índice de cantidad de Laspeyres), (d) un índice de cantidad de promedio ponderado con los precios del año dado como pesos (número índice de cantidad de Paasche), (e) el índice ideal de Fisher de cantidad y (f) el índice de cantidad de Marshall-Edgeworth.

**NUMEROS INDICE DE VALOR**

- 19.70. (a) Con 1975 como año base en los datos de la Tabla 19.24, calcular el índice de valor para 1984.
- (b) Comprobar que el índice de valor en la parte (a) es el mismo que el obtenido del producto de los índices ideales de Fisher de precios y de cantidad.
- 19.71. Con 1975 como año base en los datos de la Tabla 19.24, calcular el índice de precios  $\times$  el índice de cantidad para 1984 usando el número índice de (a) Laspeyres y (b) Paasche. Comparar los resultados con el índice de valor real.
- 19.72. Probar que los números índice de valor por agregación simple satisfacen los criterios circular y de inversión temporal.

**CAMBIO DE PERIODO BASE EN LOS NUMEROS INDICE**

- 19.73. La Tabla 19.25 muestra el índice de precios de fábrica en EE. UU. en los años 1973-1983 con base 1967. Hallar el índice de precios con (a) 1973 y (b) 1976-1978 como base.

**Tabla 19.25**

Año	Índice de precios en fábrica (1967 = 100)
1973	134.7
1974	160.1
1975	174.9
1976	183.0
1977	194.2
1978	209.3
1979	235.6
1980	268.8

**Tabla 19.25. (Continuación)**

Año	Índice de precios en fábrica (1967 = 100)
1981	293.4
1982	299.3
1983	303.1

Fuente: Survey of Current Business.

- 19.74. Comparar el índice de precios del Problema 19.73 con el índice de precios al consumo de la Tabla 19.18 del Problema 19.39, y discutir las semejanzas y diferencias entre ambos.
- 19.75. La Tabla 19.26 presenta los índices de precios al consumo de alimentación, vivienda y atención sanitaria en EE. UU. durante 1973-1983 con 1967 como año base.
  - (a) Obtener los índices de precios con 1973 como base.
  - (b) ¿Se hubieran podido obtener los resultados de la parte (a) si no se hubiese dado el año base 1967? Explicar la respuesta.

**Tabla 19.26**

Año	Alimentación	Vivienda	Atención sanitaria
1973	141.4	133.7	137.7
1974	161.7	148.8	150.5
1975	175.4	164.5	168.6
1976	180.8	174.6	184.7
1977	192.2	186.5	202.4
1978	211.2	202.8	219.4
1979	234.7	227.6	239.7
1980	255.3	263.3	265.9
1981	274.9	293.5	294.5
1982	285.8	314.7	328.7
1983	291.8	323.1	357.3

Fuente: U.S. Bureau of Labor Statistics.

- 19.76. Con referencia al Problema 19.74, determinar (a) el porcentaje de crecimiento de los

costes de la vivienda sobre los de alimentación, (b) el porcentaje de crecimiento de la asistencia sanitaria sobre la alimentación, (c) el porcentaje de crecimiento o decrecimiento de los costes de asistencia sanitaria sobre los de vivienda y (d) el primer año en que el crecimiento de los costes de vivienda sobrepasó al de alimentación.

### DEFLACION DE SERIES EN EL TIEMPO

**19.77.** (a) De los datos de la Tabla 19.25 del Problema 19.73, determinar el poder adquisitivo al por mayor de un dólar en cada uno de los años 1973-1983.

(b) Comparar los resultados obtenidos en la parte (a) con el poder adquisitivo de un dólar en el Problema 19.40, y discutir las razones de sus semejanzas y diferencias.

**19.78.** ¿Cuánto tendrían que cobrar los trabajadores del Problema 19.39 semanalmente en 1983 para mantener exactamente el mismo nivel de vida que en 1973? Comparar la respuesta con los salarios reales.

**19.79.** (a) Una familia compró una casa en 1975 por \$45,000. Suponiendo que no hicieran mejoras en ella, usar la Tabla 19.17 del Problema 19.39 para calcular un precio de reventa justo en 1982.

(b) ¿Qué otros factores habría que tener en cuenta al estimar ese precio de reventa?

**19.80.** Resolver el Problema 19.79 si la familia invirtió en la casa \$6000 y \$4000 en 1978 y 1980, respectivamente.

**19.81.** Una serie en el tiempo dada muestra el valor total en dólares de un conjunto de artículos.

(a) Describir cómo se podría ajustar la serie en el tiempo para eliminar el efecto del cambio de valor del dólar de año en año.

(b) Ilustrar el método de la parte (a) con un ejemplo.

**19.82.** Aplicar el proceso de deflación a la serie en el tiempo de la Tabla 18.44 y explicar el significado de los datos que resultan.

**19.83.** Probar que el método de deflación de series en el tiempo (tal como se ha utilizado en el Problema 19.39) es estrictamente aplicable sólo si los números índice satisfacen el criterio de inversión de factores.

**19.84.** En la Tabla 19.27 pueden verse los precios y cantidades de venta al por mayor de varios productos agrícolas en EE. UU. en 1978 y 1985. Todas las cantidades están en millones de bushels excepto las de algodón, que están en millones de balas. Tomando como base 1978, calcular un número índice de precios al por mayor para 1985 usando (a) el método de agregación simple, (b) un promedio simple (media) de relaciones, (c) el índice de Laspeyres, (d) el índice de Paasche, (e) el índice ideal de Fisher, (f) el índice de Marshall-Edgeworth y (g) una media aritmética ponderada con los valores del año dado como pesos.

**Tabla 19.27**

	1978		1985	
	Precio (dólares)	Cantidad	Precio (dólares)	Cantidad
Cebada	2.32	454.8	2.00	589.2
Maíz	2.53	7268	2.41	8865
Algodón	0.592	10.9	0.548	13.4
Avena	1.34	581.7	1.25	518.6
Soja	5.96	1869	5.16	2099
Trigo	3.71	1776	3.16	2425

Fuente: U.S. Department of Agriculture.

**19.85.** Con 1978 como año base, calcular un número índice de cantidad para 1985 usando los datos de la Tabla 19.27 y cada uno de los métodos del Problema 19.84: (a) hasta (g).

**19.86.** Probar que si los números índice de Laspeyres y de Paasche son iguales, entonces coinciden con el índice de Marshall-Edgeworth y con el índice ideal de Fisher.

**19.87.** Construir una tabla de los diversos tipos de números índice, especificando en cada caso si satisface o no los criterios de inversión temporal, de inversión de factores y circular.



# Soluciones a los problemas suplementarios

## CAPITULO 1

- 1.46. (a) Continua; (b) continua; (c) discreta; (d) discreta; (e) discreta.
- 1.47. (a) De cero en adelante; continua. (b) 2, 3, ...; discreta.  
(c) Soltero, casado, divorciado, separado, viudo; discreta. (d) De cero en adelante; continua.  
(e) 0, 1, 2, ...; discreta.
- 1.48. (a) 3300; (b) 5.8; (c) 0.004; (d) 46.74; (e) 126.00; (f) 4,000,000; (g) 148; (h) 0.000099; (i) 2180; (j) 43.88.
- 1.49. (a) 1,325,000; (b) 0.0041872; (c) 0.0000280; (d) 7,300,000,000; (e) 0.0003487; (f) 18.50.
- 1.50. (a) 3; (b) 4; (c) 7; (d) 3; (e) 8; (f) ilimitada; (g) 3; (h) 3; (i) 4; (j) 5.
- 1.51. (a) 0.005 millones de bu, o sea 5000 bu; tres. (b) 0.000000005 cm, o sea  $5 \times 10^{-9}$  cm; cuatro.  
(c) 0.5 pies, cuatro. (d)  $0.05 \times 10^8$  m, o sea  $5 \times 10^6$  m; dos. (e) 0.5 mi/seg; seis.  
(f) 500 mi/seg; tres.
- 1.52. (a)  $3.17 \times 10^{-4}$ ; (b)  $4.280 \times 10^8$ ; (c)  $2.160000 \times 10^4$ ; (d)  $9.810 \times 10^{-6}$ ; (e)  $7.32 \times 10^5$ ;  
(f)  $1.80 \times 10^{-3}$ .
- 1.53. (a) 374; (b) 14.0.
- 1.54. (a) 280 (dos cifras significativas), 2.8 cientos, o  $2.8 \times 10^2$ ; (b) 178.9;  
(c) 250,000 (tres cifras significativas), 250 (miles, o  $2.50 \times 10^5$ ); (d) 53.0; (e) 5.461; (f) 9.05;  
(g) 11.54; (h) 5,745,000 (cuatro cifras significativas), 5745 miles, 5.745 millones, o  $5.745 \times 10^6$ ;  
(i) 1.2; (j) 4157.
- 1.55. (a) -11; (b) 2; (c)  $\frac{35}{8}$ , o sea 4.375; (d) 21; (e) 3; (f) -16; (g)  $\sqrt{98}$ , o sea 9.89961 aproximadamente;  
(h)  $-7/\sqrt{34}$ , o sea -1.20049 aproximadamente; (i) 32; (j)  $10/\sqrt{17}$ , o sea 2.42536 aproximadamente.
- 1.56. (a) 22, 18, 14, 10, 6, 2, -2, -6 y -10; (b) 19.6, 16.4, 13.2, 2.8, -0.8, -4 y 8.4;  
(c) -1.2, 30,  $10 - 4\sqrt{2} = 4.34$  aproximadamente y  $10 + 4\pi = 22.57$  aproximadamente;  
(d) 3, 1, 5, 2.1, -1.5, 2.5 y 0; (e)  $X = \frac{1}{4}(10 - Y)$ .
- 1.57. (a) -5; (b) -24; (c) 8.
- 1.58. (a) -8; (b) 4; (c) -16.

- 1.76. (a)  $-4$ ; (b)  $2$ ; (c)  $5$ ; (d)  $\frac{3}{4}$ ; (e)  $1$ ; (f)  $-7$ .
- 1.77. (a)  $a = 3$ ,  $b = 4$ ; (b)  $a = -2$ ,  $b = 6$ ; (c)  $X = -0.2$ ,  $Y = -1.2$ ;  
 (d)  $A = \frac{184}{7} = 26.28571$  aproximadamente,  $B = \frac{110}{7} = 15.71429$  aproximadamente;  
 (e)  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$ ; (f)  $X = -1$ ,  $Y = 3$ ,  $Z = -2$ ; (g)  $U = 0.4$ ,  $V = -0.8$ ,  $W = 0.3$ .

1.78. (b)  $(2, -3)$ ; es decir,  $X = 2$ ,  $Y = -3$ .

1.79. (a)  $2$ ,  $-2.5$ ; (b)  $2.1$  y  $-0.8$  aproximadamente.

1.80. (a)  $\frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$ , o sea  $2.12$  y  $-0.79$  aproximadamente.

(b)  $2$  y  $-2.5$ .

(c)  $0.549$  y  $-2.549$  aproximadamente.

(d)  $\frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$ , donde  $i = \sqrt{-1}$ .

Estas raíces son *números complejos* y no aparecerán cuando se emplee un procedimiento gráfico.

1.81. (a)  $-6.15 < -4.3 < -1.5 < 1.52 < 2.37$ ; (b)  $2.37 > 1.52 > -1.5 > -4.3 > -6.15$ .

1.82. (a)  $30 \leq N \leq 50$ ; (b)  $S \geq 7$ ; (c)  $-4 \leq X < 3$ ; (d)  $P \leq 5$ ; (e)  $X - Y > 2$ .

1.83. (a)  $X \geq 4$ ; (b)  $X > 3$ ; (c)  $N < 5$ ; (d)  $Y \leq 1$ ; (e)  $-8 \leq X \leq 7$ ; (f)  $-1.8 \leq N < 3$ ; (g)  $2 \leq a < 22$ .

1.84. (a)  $2.5877$ ; (b)  $9.5877 - 10$ ; (c)  $8.8987 - 10$ ; (d)  $4.1653$ ; (e)  $9.7812 - 10$ ; (f)  $7.4464 - 10$ ; (g)  $2.6779$ ;  
 (h)  $0.0030$ ; (i)  $0.8541$ ; (j)  $1.8541$ ; (k)  $6.9912 - 10$ ; (l)  $7.9275$ .

1.85. (a)  $3640$ ; (b)  $0.675$ ; (c)  $50.64$ ; (d)  $0.08445$ ; (e)  $295.1$ ; (f)  $0.0002951$ ; (g)  $0.06314$ ; (h)  $5096$ ; (i)  $1202$ ;  
 (j)  $2,422,000$ , o sea  $2.422 \times 10^6$ .

1.86. (a)  $1,296,000$ , o sea  $1.296 \times 10^6$ ; (b)  $0.05739$ , o sea  $0.0574$  con tres cifras significativas; (c)  $556.0$ ;  
 (d)  $804.4$ ; (e)  $40,820$ ; (f)  $0.03438$ ; (g)  $15.51$ ; (h)  $45.67$ ;  
 (i)  $0.0004519 = 4.519 \times 10^{-4}$ , o sea  $4.52 \times 10^{-4}$  con tres cifras significativas; (j)  $3096$ .

1.88. (a)  $X^2 = 100Y^3$ ; (b)  $Y = 3 \times 10^{-2x}$

1.89. (a)  $3$ ; (b)  $\frac{3}{2}$ ; (c)  $-2$ ; (d)  $-5$ ; (e)  $0$ .

## CAPITULO 2

2.19. (b)  $62$ .

2.20. (a)  $799$ ; (b)  $1000$ ; (c)  $949.5$ ; (d)  $1099.5$  y  $1199.5$ ; (e)  $100$  horas; (f)  $76$ ; (g)  $\frac{62}{400} = 0.155$ , o sea,  $15.5\%$ ;  
 (h)  $29.5\%$ ; (i)  $19.0\%$ ; (j)  $78.0\%$ .

2.25. (a)  $24\%$ ; (b)  $11\%$ ; (c)  $46\%$ .

2.26. (a)  $0.003$  in; (b)  $0.3195$ ,  $0.3225$ ,  $0.3255$ , ...,  $0.3375$  in;  
 (c)  $0.320$ - $0.322$ ,  $0.323$ - $0.325$ ,  $0.326$ - $0.328$ , ...,  $0.335$ - $0.337$  in.

- 2.31. (a) \$2500 y \$150,000;  
 (b) siete (aunque estrictamente hablando la última clase no tiene tamaño especificado);  
 (c) una (aunque la primera clase parece ser abierta, sustituye realmente a \$0 - \$2499.9);  
 (d) \$0 - \$2499;  
 (e) \$3749.50 y \$74,999.50 (para la mayor parte de los supuestos prácticos, se pueden presentar como \$3750 y \$75,000, respectivamente).  
 (f) \$9999.50 y \$19,999.50; (g) 36.3% y 52.1%; (h) 22.7%; (i) 8.6%;  
 (j) debido a los errores de redondeo al calcular porcentajes.
- 2.23. (a) 492,100; (b) 1,455,000; (c) 153,700.
- 2.34. (b) 0.30; (d) 0.008 para 4 horas diarias, y 0.52 para 8 horas diarias.

CAPITULO 3

- 3.47. (a)  $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 8$   
 (b)  $f_1X_1^2 + f_2X_2^2 + f_3X_3^2 + f_4X_4^2 + f_5X_5^2$   
 (c)  $U_1(U_1 + 6) + U_2(U_2 + 6) + U_3(U_3 + 6)$   
 (d)  $Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_N^2 - 4N$   
 (e)  $4X_1Y_1 + 4X_2Y_2 + 4X_3Y_3 + 4X_4Y_4$
- 3.48. (a)  $\sum_{j=1}^3 (X_j + 3)^2$ ; (b)  $\sum_{j=1}^{15} f_j(Y_j - a)^2$ ; (c)  $\sum_{j=1}^N (2X_j - 3Y_j)$ ; (d)  $\sum_{j=1}^8 \left(\frac{X_j}{Y_j} - 1\right)^2$ ; (e)  $\frac{\sum_{j=1}^{12} f_j a_j^2}{\sum_{j=1}^{12} f_j}$
- 3.51. (a) 20; (b) - 37; (c) 53; (d) 6; (e) 226; (f) - 62; (g)  $\frac{2}{12}$ .
- 3.52. (a) -1; (b) 23.
- 3.53. 86.
- 3.54. 0.50 seg.
- 3.55. 8.25.
- 3.56. (a) 82; (b) 79.
- 3.57. 78.
- 3.58. 80% hombres y 20% mujeres.
- 3.59. 11.09 ton.
- 3.60. 501.0.
- 3.61. 0.72642 cm.
- 3.62. 26.2.

- 3.63. 715 horas.
- 3.64. (b) 1.7349 cm.
- 3.65. (a) Media = 5.4, mediana = 5; (b) media = 19.91; mediana = 19.85.
- 3.66. 85.
- 3.67. 0.51 seg.
- 3.68. 8.
- 3.69. 11.07 ton.
- 3.70. 490.6.
- 3.71. 0.72638 cm.
- 3.72. 25.4.
- 3.73. (a) 33.1 para hombres y 30.6 para mujeres.
- 3.74. \$9192.
- 3.75. 708.3 horas.
- 3.76. (a) Media = 8.9, mediana = 9, moda = 7.  
(b) Media = 6.4, mediana = 6. Como los números 4, 5, 6, 8 y 10 aparecen dos veces cada uno, podemos considerarlos a todos como modas; no obstante, es más razonable concluir en este caso que no existe moda.
- 3.77. No existe.
- 3.78. 0.53 seg.
- 3.79. 10.
- 3.80. 11.06 ton.
- 3.81. 462.
- 3.82. 0.72632 cm.
- 3.83. 23.5
- 3.84. 668.7 horas.
- 3.88. (a) 8.4; (b) 4.23.
- 3.89. (a)  $G = 8$ ; (b)  $\bar{X} = 12.4$ .
- 3.90. (a) 4.14; (b) 45.8.

- 3.91. (a) 11.07 ton; (b) 499.5.
- 3.92. 18.9%.
- 3.93. (a) 1.086%; (b) 212.3 millones; (c) 252.3 millones.
- 3.94. \$1586.87.
- 3.95. \$1608.44.
- 3.96. 3.6 y 14.4.
- 3.97. (a) 3.0; (b) 4.48.
- 3.98. (a) 3; (b) 0; (c) 0.
- 3.100. (a) 11.04; (b) 498.2.
- 3.101. 38.3 mi/h.
- 3.102. (b) 420 mi/h.
- 3.104. (a) 25; (b) 3.55.
- 3.107. (a) Cuartil inferior =  $Q_1 = 67$ , cuartil medio =  $Q_2 =$  mediana = 75 y cuartil superior =  $Q_3 = 83$ .  
 (b) El 25% tuvo 67 o menos (o sea, el 75% obtuvo 67 o más), el 50% tuvo 75 o más (luego el 50% tuvo 75 o más), y el 75% tuvo 83 o menos (o sea, el 25% tuvo 83 o más).
- 3.108. (a)  $Q_1 = 10.55$  ton,  $Q_2 = 11.07$  ton y  $Q_3 = 11.57$  ton; (b)  $Q_1 = 469.3$ ,  $Q_2 = 490.6$  y  $Q_3 = 523.3$ .
- 3.109. (a) 31.1 y 29.1; (b) 39.7 y 36.9; (c) 68.8 y 66.2; (d) 54.7 y 51.2.
- 3.110. (a) 10.15 ton; (b) 11.78 ton; (c) 10.55 ton; (d) 11.57 ton.
- 3.112. (a) 83; (b) 64.

## CAPITULO 4

- 4.33. (a) 9; (b) 4.273.
- 4.34. 4.0 ton.
- 4.35. 0.0036 cm.
- 4.36. 7.88 kg.
- 4.37. (a) 35; (b) indeterminado; (c) 900 horas.
- 4.38. (a) 18.2; (b) 3.58; (c) 6.21; (d) 0; (e)  $\sqrt{2} = 1.414$  aproximadamente; (f) 1.88.
- 4.39. (a) 2; (b) 0.85.

- 4.40. (a) 2.2; (b) 1.317.
- 4.41. 0.576 ton.
- 4.42. (a) 0.00437 cm; (b) 60.0%, 85.2% y 96.4%.
- 4.43. (a) 3.0; (b) 2.8.
- 4.44. (a) 31.2; (b) 30.6.
- 4.45. (a) 6.0; (b) 6.0.
- 4.48. (a) 0.51 ton; (b) 27.0; (c) 12.
- 4.49. (a) \$1801; (b) 10.8 años.
- 4.52. (a) 1.63 ton; (b) 33.6 o sea 34.
- 4.53. (a) \$136,650; (b) 42.4 años para hombres y 41.2 años para mujeres.
- 4.56. (a) 2.16; (b) 0.90; (c) 0.484.
- 4.58. 45.
- 4.59. (a) 0.733 ton; (b) 38.60; (c) 12.1.
- 4.61. (a)  $\bar{X} = 2.47$ ; (b)  $s = 1.11$ .
- 4.63. (a) 0.00576 cm; (b) 72.1%, 93.3% y 99.76%.
- 4.64. (a) 0.719 ton; (b) 38.24; (c) 11.8.
- 4.65. (a) 0.000569 cm; (b) 71.6% y 99.68%.
- 4.66. (a) 146.8 lb y 12.9 lb.
- 4.67. (a) 1.7349 cm y 0.00495 cm.
- 4.74. (a) 15; (b) 12.
- 4.75. (a) estadística; (b) álgebra.
- 4.76. (a) 6.6%; (b) 19.0%.
- 4.77. 51.9%.
- 4.79. Álgebra.
- 4.80. 0.19, -1.75, 1.17, 0.68, -0.29.

CAPITULO 5

- 5.15. (a) 6; (b) 40; (c) 288; (d) 2188.
- 5.16. (a) 0; (b) 4; (c) 0; (d) 25.86.
- 5.17. (a) -1; (b) 5; (c) -91; (d) 53.
- 5.19. 0, 26.25, 0, 1193.1.
- 5.21. 7.
- 5.22. (a) 0, 6, 19, 42; (b) -4, 22, -117, 560; (c) 1, 7, 38, 155.
- 5.23. 0, 0.2344, -0.0586, 0.0696.
- 5.25. (a)  $m_1 = 0$ ; (b)  $m_2 = pq$ ; (c)  $m_3 = pq(q - p)$ ; (d)  $m_4 = pq(p^2 - pq + q^2)$ .
- 5.27.  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 5.97$ ,  $m_3 = -0.397$ ,  $m_4 = 89.22$ .
- 5.29.  $m_1$  (corregido) = 0,  $m_2$  (corregido) = 5.440,  $m_3$  (corregido) = -0.5920,  $m_4$  (corregido) = 76.2332.
- 5.30. (a)  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 0.53743$ ,  $m_3 = 0.36206$ ,  $m_4 = 0.84914$ ;  
 (b)  $m_2$  (corregido) = 0.51660,  $m_4$  (corregido) = 0.78378.
- 5.31. (a) 0; (b) 52.95; (c) 92.35; (d) 7158.20; (e) 26.2; (f) 7.28; (g) 739.58; (h) 22.247; (i) 706.428; (j) 24,545.
- 5.32. (a) -0.2464; (b) -0.2464.
- 5.33. 0.9190.
- 5.34. Primera distribución.
- 5.35. (a) 0.040; (b) 0.074.
- 5.36. (a) -0.02; (b) -0.13.
- 5.37. (b) -0.078,
- 5.38. (a) 2.62; (b) 2.58.
- 5.39. (a) 2.94; (b) 2.94.
- 5.40. (a) Segunda; (b) primera.
- 5.41. (a) Segunda; (b) ninguna de ellas; (c) primera.
- 5.42. (a) Mayor que 1875; (b) igual a 1875; (c) menor que 1875.
- 5.43. (a) 0.313.

4	3	2	1	0	Y
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

3	2	1	0	X
$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$

## CAPITULO 6

- 6.40. (a)  $\frac{5}{26}$ ; (b)  $\frac{5}{36}$ ; (c) 0.98; (d)  $\frac{7}{8}$ ; (e)  $\frac{7}{8}$ .
- 6.41. (a) Probabilidad de rey en la primera y no rey en la segunda.  
 (b) Probabilidad de rey en la primera o en la segunda o en ambas.  
 (c) No rey en la primera, no rey en la segunda, o ambas cosas (es decir, ni rey en una ni rey en otra).  
 (d) Probabilidad de rey en la tercera, supuesto que ha salido rey en la primera pero no en la segunda.  
 (e) Ningún rey en las tres extracciones.  
 (f) Probabilidad de rey en la primera y segunda o no rey en la segunda y rey en la tercera.
- 6.42. (a)  $\frac{1}{3}$ ; (b)  $\frac{2}{5}$ ; (c)  $\frac{11}{15}$ ; (d)  $\frac{2}{5}$ ; (e)  $\frac{4}{5}$ .
- 6.43. (a)  $\frac{4}{25}$ ; (b)  $\frac{4}{75}$ ; (c)  $\frac{16}{25}$ ; (d)  $\frac{64}{225}$ ; (e)  $\frac{11}{15}$ ; (f)  $\frac{1}{5}$ ; (g)  $\frac{104}{225}$ ; (h)  $\frac{221}{225}$ ; (i)  $\frac{6}{25}$ ; (j)  $\frac{52}{225}$ .
- 6.44. (a)  $\frac{29}{185}$ ; (b)  $\frac{27}{37}$ ; (c)  $\frac{118}{185}$ ; (d)  $\frac{52}{185}$ ; (e)  $\frac{11}{15}$ ; (f)  $\frac{1}{5}$ ; (g)  $\frac{86}{185}$ ; (h)  $\frac{182}{185}$ ; (i)  $\frac{9}{37}$ ; (j)  $\frac{26}{111}$ .
- 6.45. (a)  $\frac{5}{18}$ ; (b)  $\frac{11}{36}$ ; (c)  $\frac{1}{36}$ .
- 6.46. (a)  $\frac{47}{52}$ ; (b)  $\frac{16}{221}$ ; (c)  $\frac{15}{34}$ ; (d)  $\frac{13}{17}$ ; (e)  $\frac{210}{221}$ ; (f)  $\frac{10}{13}$ ; (g)  $\frac{49}{51}$ ; (h)  $\frac{77}{442}$ .
- 6.47.  $\frac{5}{18}$ .
- 6.48. (a) 81:44, (b) 21:4.
- 6.49.  $\frac{19}{42}$ .
- 6.50. (a)  $\frac{2}{5}$ ; (b)  $\frac{1}{5}$ ; (c)  $\frac{4}{15}$ ; (d)  $\frac{13}{15}$ .
- 6.51. (a) 37.5%; (b) 93.75%; (c) 6.25%; (d) 68.75%.

6.52. (a)

$X$	0	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

- 6.53. (a)  $\frac{1}{48}$ ; (b)  $\frac{7}{24}$ ; (c)  $\frac{3}{4}$ ; (d)  $\frac{1}{6}$ .

6.54. (a)

$X$	0	1	2	3
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

- 6.55. (a)  $\frac{3}{10}$ ; es la probabilidad de sacar un total de 2 fichas rojas.  
 (b)  $\frac{5}{6}$ ; es la probabilidad de sacar 1, 2 ó 3 fichas rojas (o sea, de extraer al menos una roja).
- 6.56. \$9.
- 6.57. \$4.80 diarios.



- 6.58.  $A$  contribuye \$12.50;  $B$  contribuye \$7.50.
- 6.59. (a) 7; (b) 590; (c) 541; (d) 10,900.
- 6.60. (a) 1.2; (b) 0.56; (c)  $\sqrt{0.56} = 0.75$  aproximadamente.
- 6.64. (a) 12; (b) 2520; (c) 720.
- 6.65.  $n = 5$ .
- 6.66. 60.
- 6.67. (a) 5040; (b) 720; (c) 240.
- 6.68. (a) 8400; (b) 2520.
- 6.69. (a) 32,805; (b) 11,664.
- 6.70. 26.
- 6.71. (a) 120; (b) 72; (c) 12.
- 6.72. (a) 35; (b) 70; (c) 45.
- 6.73.  $n = 6$ .
- 6.74. 210.
- 6.75. 840.
- 6.76. (a) 42,000; (b) 7000.
- 6.77. (a) 120; (b) 12,600.
- 6.78. (a) 150; (b) 45; (c) 100.
- 6.79. (a) 17; (b) 163
- 6.81.  $2.95 \times 10^{25}$ .
- 6.83. (a)  $\frac{6}{5525}$ ; (b)  $\frac{22}{425}$ ; (c)  $\frac{169}{425}$ ; (d)  $\frac{73}{5525}$ .
- 6.84.  $\frac{171}{1296}$ .
- 6.85. (a) 0.59049; (b) 0.32805; (c) 0.08866,
- 6.86. (b)  $\frac{3}{4}$ ; (c)  $\frac{7}{8}$ .
- 6.87. (a) 8; (b) 78; (c) 86; (d) 102; (e) 20; (f) 142.
- 6.90.  $\frac{1}{3}$ .

## CAPITULO 6

- 6.40. (a)  $\frac{5}{26}$ ; (b)  $\frac{5}{36}$ ; (c) 0.98; (d)  $\frac{2}{9}$ ; (e)  $\frac{7}{8}$ .
- 6.41. (a) Probabilidad de rey en la primera y no rey en la segunda.  
 (b) Probabilidad de rey en la primera o en la segunda o en ambas.  
 (c) No rey en la primera, no rey en la segunda, o ambas cosas (es decir, ni rey en una ni rey en otra).  
 (d) Probabilidad de rey en la tercera, supuesto que ha salido rey en la primera pero no en la segunda.  
 (e) Ningún rey en las tres extracciones.  
 (f) Probabilidad de rey en la primera y segunda o no rey en la segunda y rey en la tercera.

6.42. (a)  $\frac{1}{3}$ ; (b)  $\frac{3}{5}$ ; (c)  $\frac{11}{15}$ ; (d)  $\frac{2}{5}$ ; (e)  $\frac{4}{5}$ .

6.43. (a)  $\frac{4}{25}$ ; (b)  $\frac{4}{75}$ ; (c)  $\frac{16}{225}$ ; (d)  $\frac{64}{225}$ ; (e)  $\frac{11}{15}$ ; (f)  $\frac{1}{5}$ ; (g)  $\frac{104}{225}$ ; (h)  $\frac{221}{225}$ ; (i)  $\frac{6}{25}$ ; (j)  $\frac{52}{225}$ .

6.44. (a)  $\frac{29}{185}$ ; (b)  $\frac{2}{37}$ ; (c)  $\frac{118}{185}$ ; (d)  $\frac{52}{185}$ ; (e)  $\frac{11}{15}$ ; (f)  $\frac{1}{5}$ ; (g)  $\frac{86}{185}$ ; (h)  $\frac{182}{185}$ ; (i)  $\frac{9}{37}$ ; (j)  $\frac{26}{111}$ .

6.45. (a)  $\frac{5}{18}$ ; (b)  $\frac{11}{36}$ ; (c)  $\frac{1}{36}$ .

6.46. (a)  $\frac{47}{32}$ ; (b)  $\frac{16}{221}$ ; (c)  $\frac{15}{34}$ ; (d)  $\frac{13}{17}$ ; (e)  $\frac{210}{221}$ ; (f)  $\frac{10}{13}$ ; (g)  $\frac{40}{51}$ ; (h)  $\frac{77}{442}$ .

6.47.  $\frac{5}{18}$ .

6.48. (a) 81:44; (b) 21:4.

6.49.  $\frac{19}{42}$ .

6.50. (a)  $\frac{2}{5}$ ; (b)  $\frac{1}{5}$ ; (c)  $\frac{4}{15}$ ; (d)  $\frac{13}{15}$ .

6.51. (a) 37.5%; (b) 93.75%; (c) 6.25%; (d) 68.75%.

6.52. (a)

$X$	0	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

6.53. (a)  $\frac{1}{48}$ ; (b)  $\frac{7}{24}$ ; (c)  $\frac{3}{4}$ ; (d)  $\frac{1}{6}$ .

6.54. (a)

$X$	0	1	2	3
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

- 6.55. (a)  $\frac{3}{10}$ ; es la probabilidad de sacar un total de 2 fichas rojas.  
 (b)  $\frac{5}{6}$ ; es la probabilidad de sacar 1, 2 ó 3 fichas rojas (o sea, de extraer al menos una roja).

6.56. \$9.

6.57. \$4.80 diarios.

- 6.58.  $A$  contribuye \$12.50;  $B$  contribuye \$7.50.
- 6.59. (a) 7; (b) 590; (c) 541; (d) 10,900.
- 6.60. (a) 1.2; (b) 0.56; (c)  $\sqrt{0.56} = 0.75$  aproximadamente.
- 6.64. (a) 12; (b) 2520; (c) 720.
- 6.65.  $n = 5$ .
- 6.66. 60.
- 6.67. (a) 5040; (b) 720; (c) 240.
- 6.68. (a) 8400; (b) 2520.
- 6.69. (a) 32,805; (b) 11,664.
- 6.70. 26.
- 6.71. (a) 120; (b) 72; (c) 12.
- 6.72. (a) 35; (b) 70; (c) 45.
- 6.73.  $n = 6$ .
- 6.74. 210.
- 6.75. 840.
- 6.76. (a) 42,000; (b) 7000.
- 6.77. (a) 120; (b) 12,600.
- 6.78. (a) 150; (b) 45; (c) 100.
- 6.79. (a) 17; (b) 163.
- 6.81.  $2.95 \times 10^{25}$ .
- 6.83. (a)  $\frac{6}{5525}$ ; (b)  $\frac{22}{425}$ ; (c)  $\frac{169}{425}$ ; (d)  $\frac{73}{5525}$ .
- 6.84.  $\frac{171}{1296}$ .
- 6.85. (a) 0.59049; (b) 0.32805; (c) 0.08866.
- 6.86. (b)  $\frac{3}{4}$ ; (c)  $\frac{7}{8}$ .
- 6.87. (a) 8; (b) 78; (c) 86; (d) 102; (e) 20; (f) 142.
- 6.90.  $\frac{1}{3}$ .

- 6.91.  $1/3,838,380$  (es decir, las apuestas están en contra en relación 3,838,379 a 1).
- 6.92. (a) 658,007 a 1; (b) 91,389 a 1; (c) 9879 a 1.
- 6.93. (a) 649,739 a 1; (b) 71,192 a 1; (c) 4164 a 1; (d) 693 a 1.
- 6.94.  $\frac{11}{36}$ .
- 6.95.  $\frac{1}{4}$ .

## CAPITULO 7

- 7.35. (a) 5040; (b) 210; (c) 126; (d) 165; (e) 6.
- 7.36. (a)  $q^7 + 7q^6p + 21q^5p^2 + 35q^4p^3 + 35q^3p^4 + 21q^2p^5 + 7qp^6 + p^7$   
 (b)  $q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 + 120q^7p^3 + 210q^6p^4 + 252q^5p^5 + 210q^4p^6 + 120q^3p^7 + 45q^2p^8 + 10qp^9 + p^{10}$
- 7.37. (a)  $\frac{1}{64}$ ; (b)  $\frac{3}{32}$ ; (c)  $\frac{15}{64}$ ; (d)  $\frac{5}{16}$ ; (e)  $\frac{15}{64}$ ; (f)  $\frac{3}{32}$ ; (g)  $\frac{1}{64}$ .
- 7.38. (a)  $\frac{57}{64}$ ; (b)  $\frac{21}{32}$ .
- 7.39. (a)  $\frac{1}{4}$ ; (b)  $\frac{5}{16}$ ; (c)  $\frac{11}{16}$ ; (d)  $\frac{5}{8}$ .
- 7.40. (a) 250; (b) 25; (c) 500.
- 7.41. (a)  $\frac{17}{162}$ ; (b)  $\frac{1}{324}$ .
- 7.42.  $\frac{64}{243}$ .
- 7.43.  $\frac{193}{512}$ .
- 7.44. (a)  $\frac{32}{243}$ ; (b)  $\frac{192}{243}$ ; (c)  $\frac{40}{243}$ ; (d)  $\frac{242}{243}$ .
- 7.45. (a) 42; (b) 3.550; (c)  $-0.1127$ ; (d) 2.927.
- 7.47. (a)  $Npq(q - p)$ ; (b)  $Npq(1 - 6pq) + 3N^2p^2q^2$ .
- 7.49. (a)  $1.5y - 1.6$ ; (b)  $72y + 90$ .
- 7.50. (a) 75.4; (b) 9.
- 7.51. (a) 0.8767; (b) 0.0786; (c) 0.2991.
- 7.52. (a) 0.0375; (b) 0.7123; (c) 0.9265; (d) 0.0154; (e) 0.7251; (f) 0.0395.
- 7.53. (a) 0.9495; (b) 0.9500; (c) 0.6826.
- 7.54. (a) 0.75; (b)  $-1.86$ ; (c) 2.08; (d) 1.625 o sea 0.849; (e)  $\pm 1.645$ .

- 7.55.  $-0.995$ .
- 7.56. (a) 0.0317; (b) 0.3790; (c) 0.1989.
- 7.57. (a) 20; (b) 36; (c) 227; (d) 40.
- 7.58. (a) 93%; (b) 8.1%; (c) 0.47%; (d) 15%.
- 7.59. 84.
- 7.60. (a) 61.7%; (b) 54.7%.
- 7.61. (a) 95.4%; (b) 23.0%; (c) 93.3%.
- 7.62. (a) 1.15; (b) 0.77.
- 7.63. (a) 0.9962; (b) 0.0687; (c) 0.0286; (d) 0.0558.
- 7.64. (a) 0.2511; (b) 0.1342.
- 7.65. (a) 0.0567; (b) 0.9198; (c) 0.6404; (d) 0.0079.
- 7.66. 0.0089.
- 7.67. (a) 0.04979; (b) 0.1494; (c) 0.2241; (d) 0.2241; (e) 0.1680; (f) 0.1008.
- 7.68. (a) 0.0838; (b) 0.5976; (c) 0.4232.
- 7.69. (a) 0.05610; (b) 0.06131.
- 7.70. (a) 0.00248; (b) 0.04462; (c) 0.1607; (d) 0.1033; (e) 0.6964; (f) 0.0620.
- 7.71. (a) 0.08208; (b) 0.2052; (c) 0.2565; (d) 0.2138; (e) 0.8911; (f) 0.0142.
- 7.72. (a)  $\frac{5}{3888}$ ; (b)  $\frac{5}{324}$ .
- 7.73. (a) 0.0348; (b) 0.000295.
- 7.74.  $\frac{1}{16}$ .
- 7.75.  $p(X) = \binom{4}{x}(0.32)^x(0.68)^{4-x}$ . Las frecuencias esperadas son 32, 60, 43, 13 y 2, respectivamente.
- 7.77. Las frecuencias esperadas son 1.7, 5.5, 12.0, 15.9, 13.7, 7.6, 2.7 y 0.6, respectivamente.
- 7.78. Las frecuencias esperadas son 1.1, 4.0, 11.1, 23.9, 39.5, 50.2, 49.0, 36.6, 21.1, 9.4, 3.1 y 1.0, respectivamente.
- 7.79. Las frecuencias esperadas son 41.7, 53.4, 34.2, 14.6 y 4.7, respectivamente.
- 7.80.  $p(X) = \frac{(0.61)^x e^{-0.61}}{X!}$ . Las frecuencias esperadas son 108.7, 66.3, 20.2, 4.1 y 0.7, respectivamente.

## CAPITULO 8

- 8.21. (a) 9.0; (b) 4.47; (c) 9.0; (d) 3.16.
- 8.22. (a) 9.0; (b) 4.47; (c) 9.0; (d) 2.58.
- 8.23. (a)  $\mu_{\bar{X}} = 22.40$  g,  $\sigma_{\bar{X}} = 0.008$  g; (b)  $\mu_{\bar{X}} = 22.40$  g,  $\sigma_{\bar{X}} =$  ligeramente menor que 0.008 g.
- 8.24. (a)  $\mu_{\bar{X}} = 22.40$  g,  $\sigma_{\bar{X}} = 0.008$  g; (b)  $\mu_{\bar{X}} = 22.40$  g,  $\sigma_{\bar{X}} = 0.0057$  g.
- 8.25. (a) 237; (b) 2; (c) ninguna, (d) 34.
- 8.26. (a) 0.4972; (b) 0.1587; (c) 0.0918; (d) 0.9544.
- 8.27. (a) 0.8164; (b) 0.0228; (c) 0.0038; (d) 1.0000.
- 8.28. 0.0026.
- 8.34. (a) 0.0029; (b) 0.9596; (c) 0.1446.
- 8.35. (a) 2; (b) 996; (c) 218.
- 8.36. (a) 0.0179; (b) 0.8664; (c) 0.1841.
- 8.37. (a) 6; (b) 9; (c) 2; (d) 12.
- 8.39. (a) 19; (b) 125.
- 8.40. (a) 0.0077; (b) 0.8869.
- 8.41. (a) 0.0028; (b) 0.9172.
- 8.42. (a) 0.2150; (b) 0.0064, 0.4504.
- 8.43. 0.0482.
- 8.44. 0.0188.
- 8.45. 0.0410.
- 8.47. (a) 118.79 g; (b) 0.74 g.
- 8.48. 0.0228.
- 8.49. (a) 7.2; (b) 8.4.
- 8.50. (a) 106; (b) 4.
- 8.51. 159.
- 8.52. (a) 78.7; (b) 0.0090.

## CAPITULO 9

- 9.21. (a) 9.5 kg; (b)  $0.74 \text{ kg}^2$ ; (c) 0.78 kg y 0.86 kg, respectivamente.
- 9.22. (a) 1200 h; (b) 105.4 h.
- 9.23. (a) Las estimaciones de desviaciones típicas de la población para muestras de 30, 50 y 100 tubos son 101.7 h, 101.0 h y 100.5 h, respectivamente; las estimaciones de medias de la población son 1200 h en todos los casos.
- 9.24. (a)  $11.09 \pm 0.18 \text{ ton}$ ; (b)  $11.09 \pm 0.24 \text{ ton}$ .
- 9.25. (a)  $0.72642 \pm 0.000095 \text{ in}$ ; (b)  $0.72642 \pm 0.000085 \text{ in}$ ; (c)  $0.72642 \pm 0.000072 \text{ in}$ ; (d)  $0.72642 \pm 0.000060 \text{ in}$ .
- 9.26. (a)  $0.72642 \pm 0.000025 \text{ in}$ ; (b)  $0.000025 \text{ in}$ .
- 9.27. (a) Al menos 97; (b) al menos 68; (c) al menos 167; (d) al menos 225.
- 9.28. (a) Al menos 385; (b) al menos 271; (c) al menos 666; (d) al menos 900.
- 9.29. (a)  $2400 \pm 45 \text{ lb}$ ,  $2400 \pm 59 \text{ lb}$ ; (b) 87.6%.
- 9.30. (a)  $0.70 \pm 0.12$ ,  $0.69 \pm 0.11$ ; (b)  $0.70 \pm 0.15$ ,  $0.68 \pm 0.15$ ; (c)  $0.70 \pm 0.18$ ,  $0.67 \pm 0.17$ .
- 9.31. (a) Al menos 323; (b) al menos 560; (c) al menos 756.
- 9.32. (a) 16,400; (b) 27,100; (c) 38,420; (d) 66,000.
- 9.33. (a)  $1.07 \pm 0.09 \text{ h}$ ; (b)  $1.07 \pm 0.12 \text{ h}$ .
- 9.34. (a)  $0.045 \pm 0.073$ ; (b)  $0.045 \pm 0.097$ ; (c)  $0.045 \pm 0.112$ .
- 9.35. (a)  $63.8 \pm 0.24 \text{ lb}$ ; (b)  $63.8 \pm 0.31 \text{ lb}$ .
- 9.36. (a)  $180 \pm 24.9 \text{ lb}$ ; (b)  $180 \pm 32.8 \text{ lb}$ ; (c)  $180 \pm 38.2 \text{ lb}$ .
- 9.37. 8.6 lb.
- 9.38. (a) Al menos 4802; (b) al menos 8321; (c) al menos 11,250.

## CAPITULO 10

- 10.29. (a) 0.2606.
- 10.30. (a) Aceptar la hipótesis si se sacan entre 22 y 42 rojas, y rechazarla en caso contrario;  
(b) 0.99; (c) aceptar la hipótesis si se sacan entre 24 y 40 rojas, y rechazarla en caso contrario.
- 10.31. (a)  $H_0: p = 0.5$ ,  $H_1: p > 0.5$ ; (b) criterio de una cola;  
(c) rechazar  $H_0$  si se sacan más de 39 rojas, y aceptarla en caso contrario (o aplazar la decisión);  
(d) rechazar  $H_0$  si se sacan más de 41 rojas, y aceptarla en caso contrario (o aplazar la decisión).

- 10.32. (a) No se puede rechazar la hipótesis al nivel 0.05; (b) se puede rechazar la hipótesis al nivel 0.05.
- 10.33. No se puede rechazar al nivel 0.01, ni con criterio unilateral ni con bilateral.
- 10.34. Usando un criterio unilateral, la podemos rechazar a ambos niveles.
- 10.35. Con criterio de una cola, el resultado es significativo al nivel 0.05, pero no al 0.01.
- 10.36. Sí, es significativo a ambos niveles, usando en cada caso criterio unilateral.
- 10.37. Tanto con criterio de una como de dos colas, el resultado es significativo al nivel 0.05.
- 10.38. El resultado es significativo al nivel 0.01 usando un criterio de una cola, pero no con uno de dos colas.
- 10.39. (a) 0.3112; (b) 0.0118; (c) 0; (d) 0; (e) 0.0118.
- 10.43. (a)  $8.64 \pm 0.96$  oz; (b)  $8.64 \pm 0.83$  oz; (c)  $8.64 \pm 0.63$  oz.
- 10.44. Los límites superiores de control son, respectivamente, (a) 6 y (b) 4 defectuosos.
- 10.45. (a) Sí; (b) no.
- 10.46. Un criterio unilateral a ambos niveles de significación muestra que  $B$  es superior a  $A$ .
- 10.47. Un criterio de una cola muestra que la diferencia es significativa al nivel 0.05, pero no al 0.01.
- 10.48. Un criterio de una cola demuestra que el nuevo fertilizante es superior a ambos niveles de significación.
- 10.49. (a) Un criterio bilateral muestra que no hay diferencia al nivel 0.05.  
(b) Un criterio unilateral muestra que  $B$  no es mejor que  $A$  al nivel 0.05.
- 10.50. (a) Un criterio de dos colas al nivel 0.05 no rechaza la hipótesis de proporciones iguales.  
(b) Un criterio de una cola al nivel 0.05 muestra que  $A$  tiene mayor proporción de rojas que  $B$ .
- 10.51. (a) 9; (b) 10; (c) 10; (d) 8.
- 10.54. (a) No; (b) sí; (c) no.
- 10.55. (a) Sí; (b) sí; (c) no.
- 10.56. (a) Sí, (b) sí; (c) sí.
- 10.57. (a) No; (b) no; (c) no.

## CAPITULO 11

- 11.20. (a) 2.60; (b) 1.75; (c) 1.34; (d) 2.95; (e) 2.13.
- 11.21. (a) 3.75; (b) 2.68; (c) 2.48; (d) 2.39; (e) 2.33.
- 11.22. (a) 1.71; (b) 2.09; (c) 4.03; (d)  $-0.128$ .



- 11.23. (a) 1.81; (b) 2.76; (c)  $-0.879$ ; (d)  $-1.37$ .
- 11.24. (a)  $\pm 4.60$ ; (b)  $\pm 3.06$ ; (c)  $\pm 2.79$ ; (d)  $\pm 2.75$ ; (e)  $\pm 2.70$ .
- 11.25. (a)  $7.38 \pm 0.82$  g; (b)  $7.38 \pm 1.16$  g.
- 11.26. (a)  $7.38 \pm 0.73$  g; (b)  $7.38 \pm 0.96$  g.
- 11.27. (a)  $0.298 \pm 0.030$  seg; (b)  $0.298 \pm 0.049$  seg.
- 11.28. Un criterio de dos colas enseña que no hay evidencia ni al nivel 0.05 ni al 0.01 de que la vida media haya cambiado.
- 11.29. Un criterio de una cola no pone de manifiesto decrecimiento en la media ni al nivel 0.05 ni al 0.01.
- 11.30. Un criterio de dos colas a ambos niveles muestra que el producto no cumple las especificaciones requeridas.
- 11.31. Un criterio unilateral a ambos niveles muestra que el contenido medio de cobre es mayor que lo que las especificaciones exigen.
- 11.32. Un criterio de una cola muestra que el proceso no debe ser introducido si el nivel adoptado es el 0.01 pero sí en caso de adoptar el nivel 0.05.
- 11.33. Un criterio unilateral muestra que  $A$  es menor que  $B$  al nivel 0.05 de significación.
- 11.34. Con un criterio bilateral al nivel 0.05 no concluimos, a la vista de las muestras, que haya diferencia en acidez entre los dos tipos.
- 11.35. Con un criterio de una cola al nivel 0.05, concluimos que el primer grupo no es superior al segundo.
- 11.36. (a) 21.0; (b) 26.2; (c) 23.3.
- 11.37. (a) 15.5; (b) 30.1; (c) 41.3; (d) 55.8.
- 11.38. (a) 20.1; (b) 36.2; (c) 48.3; (d) 63.7.
- 11.39. (a)  $\chi_1^2 = 9.59$  y  $\chi_2^2 = 34.2$ .
- 11.40. (a) 16.0; (b) 6.35; (c) suponiendo áreas iguales en ambas colas,  $\chi_1^2 = 2.17$  y  $\chi_2^2 = 14.1$ .
- 11.41. (a) 87.0 a 230.9 h; (b) 78.1 a 288.5 h.
- 11.42. (a) 95.6 a 170.4 h; (b) 88.9 a 190.8 h.
- 11.43. (a) 122.5; (b) 179.2.
- 11.44. (a) 207.7; (b) 295.2.
- 11.46. (a) 106.1 a 140.5 h; (b) 102.1 a 148.1 h.
- 11.47. 105.5 a 139.6 h.

- 11.48. Sobre la base de la muestra dada, el aparente crecimiento en variabilidad no es significativo en esos dos niveles.
- 11.49. El aparente decrecimiento en variabilidad es significativo al nivel 0.05, pero no al 0.01.
- 11.50. (a)  $F_{.95} = 3.07$ ; (b)  $F_{.99} = 4.02$ ; (c)  $F_{.95} = 2.11$ ; (d)  $F_{.99} = 2.83$ .
- 11.51.  $F_{.95} = 1.95$ , usando interpolación.
- 11.52. La varianza de la muestra 1 es significativamente mayor al nivel 0.05, pero no al 0.01.
- 11.53. (a) Sí; (b) no.

## CAPITULO 12

- 12.26. La hipótesis no es rechazable en ninguno de los dos niveles.
- 12.27. Misma conclusión que antes.
- 12.28. El nuevo no sigue el esquema de los otros. (El hecho de que las calificaciones sean mejores que la media *puede* ser debido a una especial habilidad para la enseñanza o a menor exigencia, o a ambas cosas a la vez.)
- 12.29. No hay razón para rechazar la hipótesis de que las monedas son buenas.
- 12.30. No hay razón para rechazar la hipótesis a ninguno de los niveles.
- 12.31. (a) 10, 60 y 50, respectivamente;  
(b) la hipótesis de que los resultados son los esperados no se puede rechazar al nivel 0.05.
- 12.32. La diferencia es significativa al nivel 0.05.
- 12.33. (a) El ajuste es bueno; (b) no.
- 12.34. (a) El ajuste es «demasiado bueno»; (b) el ajuste es pobre al nivel 0.05.
- 12.35. (a) El ajuste es muy malo al nivel 0.05; como la distribución binomial da un buen ajuste de los datos, esto es consistente con el Problema 12.33.  
(b) El ajuste es bueno, pero no «demasiado bueno».
- 12.36. La hipótesis se puede rechazar al nivel 0.05 pero no al 0.01.
- 12.37. Misma conclusión que antes.
- 12.38. La hipótesis no se puede rechazar a esos niveles.
- 12.39. La hipótesis no se puede rechazar al nivel 0.05.
- 12.40. La hipótesis se puede rechazar a ambos niveles.
- 12.41. La hipótesis se puede rechazar a ambos niveles.

12.42. La hipótesis no se puede rechazar ni a un nivel ni al otro.

12.49. (a) 0.3863 (sin corregir) y (b) 0.3779 (con la corrección de Yates).

12.50. (a) 0.2205, 0.1985 (corregidos); (b) 0.0872, 0.0738 (corregido).

12.51. 0.4651.

12.54. (a) 0.4188, 0.4082 (corregido).

12.55. (a) 0.2261, 0.2026 (corregido); (b) 0.0875, 0.0740 (corregido).

12.56. 0.3715.

### CAPITULO 13

13.24. (a) 4; (b) 6; (c)  $\frac{28}{3}$ ; (d) 10.5; (e) 6; (f) 9.

13.25. (2, 1).

13.26. (a)  $2X + Y = 4$ ; (b)  $X$  intersección = 2,  $Y$  intersección = 4; (c) -2, -6.

13.27.  $Y = \frac{2}{3}X - 3$ , o sea  $2X - 3Y = 9$ .

13.28. (a) Pendiente =  $\frac{3}{5}$ ,  $Y$  intersección = -4; (b)  $3X - 5Y = 11$ .

13.29. (a)  $-\frac{4}{3}$ ; (b)  $\frac{32}{3}$ ; (c)  $4X + 3Y = 32$ .

13.30.  $X/3 + Y/(-5) = 1$ , o sea  $5X - 3Y = 15$ .

13.31. (a)  $^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{C} + 32$ ; (b)  $176^{\circ}\text{F}$ ; (c)  $20^{\circ}\text{C}$ .

13.32. (a)  $Y = -\frac{1}{3} + \frac{5}{7}X$ , o sea  $Y = -0.333 + 0.714X$ ; (b)  $X = 1 + \frac{9}{2}Y$ , o sea  $X = 1.00 + 1.29Y$ .

13.33. (a) 3.24, 8.24; (b) 10.00.

13.35. (b)  $Y = 29.13 + 0.661X$ ; (c)  $X = -14.39 + 1.15Y$ ; (d) 79; (e) 95.

13.38.  $Y = 5.51 + 3.20(X - 3) + 0.733(X - 3)^2$ , o sea  $Y = 2.51 - 1.20X + 0.733X^2$ .

13.39. (b)  $D = 41.77 - 1.096V + 0.08786V^2$ ; (c) 170 pies, 516 pies.

13.43. (b)  $Y = 32.14(1.427)^X$ , o sea  $Y = 32.14(10)^{0.1544X}$ , o sea  $Y = 32.14 e^{0.3556X}$ , donde  $e = 2.718...$   
es la base de los logaritmos naturales.  
(d) 387.

### CAPITULO 14

14.40. (b)  $Y = 4.000 + 0.500X$ ; (c)  $X = 2.408 + 0.612Y$ .

- 14.41. (a) 1.304; (b) 1.443.
- 14.42. (a) 24.50; (b) 17.00; (c) 7.50.
- 14.43. 0.5533.
- 14.45. 1.5.
- 14.46. (a) 0.8961; (b)  $Y = 80.78 + 1.138X$ ; (c) 132.
- 14.47. (a) 0.958; (b) 0.872.
- 14.48. (a)  $Y = 0.8X + 12$ ; (b)  $X = 0.45Y + 1$ .
- 14.49. (a) 1.60; (b) 1.20.
- 14.50.  $\pm 0.80$ .
- 14.51. 75%.
- 14.53. (a)  $-0.9203$ .
- 14.54. (a)  $Y = 18.04 - 1.34X$ ,  $Y = 51.18 - 2.01X$ .
- 14.58. 0.5440.
- 14.59. (a)  $Y = 4.44X - 142.22$ ; (b) 141.9 lb y 177.5 lb, respectivamente.
- 14.60. (a) 16.92 lb; (b) 2.07 in.
- 14.62. 0.754.
- 14.63. 0.22.
- 14.64. (a) Sí; (b) no.
- 14.65. (a) No; (b) sí.
- 14.66. (a) 0.2923 y 0.7951; (b) 0.1763 y 0.8361.
- 14.67. (a) 0.3912 y 0.7500; (b) 0.3146 y 0.7861.
- 14.68. (a) 0.7096 y 0.9653; (b) 0.4961 y 0.7235.
- 14.69. (a) Sí; (b) no.
- 14.70. (a)  $2.00 \pm 0.21$ ; (b)  $2.00 \pm 0.28$ .
- 14.71. (a) Usando un criterio de una cola podemos rechazarla.  
(b) Usando un criterio de una cola no podemos rechazarla.
- 14.72. (a)  $37.0 \pm 3.28$ ; (b)  $37.0 \pm 4.45$ .

14.73. (a)  $37.0 \pm 0.69$ ; (b)  $37.0 \pm 0.94$ .

14.74. (a)  $1.138 \pm 0.398$ ; (b)  $132.0 \pm 16.6$ ; (c)  $132.0 \pm 5.4$ .

### CAPITULO 15

15.26. (a)  $X_3 = b_{3.12} + b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2$ ; (b)  $X_4 = b_{4.1235} + b_{41.235}X_1 + b_{42.135}X_2 + b_{43.125}X_3$ .

15.28. (a)  $X_3 = 61.40 - 3.65X_1 + 2.54X_2$ ; (b) 40.

15.29. (a)  $X_3 - 74 = 4.36(X_1 - 6.8) + 4.04(X_2 - 7.0)$ , o sea  $X_3 = 16.07 + 4.36X_1 + 4.04X_2$ ; (b) 84 y 66.

15.31. 3.12.

15.32. (a) 5.883; (b) 0.6882.

15.33. 0.9927.

15.34. (a) 0.7567; (b) 0.7255; (c) 0.6810.

15.37. (a) 0.5950; (b)  $-0.8995$ ; (c) 0.8727.

15.38. (a) 0.2672; (b) 0.5099; (c) 0.4026.

15.42. (a)  $X_4 = 6X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 100$ ; (b) 54.

15.43. (a) 0.8710; (b) 0.8587; (c)  $-0.8426$ .

15.44. (a) 0.8947; (b) 2.680.

### CAPITULO 16

16.21. Hay diferencia significativa a ambos niveles.

16.22. No hay diferencia significativa a ambos niveles.

16.23. Hay diferencia significativa entre los métodos de enseñanza al nivel 0.05 pero no al 0.01.

16.24. Hay diferencia significativa al nivel 0.05 pero no al 0.01.

16.25. Hay diferencia significativa entre las calificaciones a ambos niveles.

16.26. No hay diferencia significativa entre operarios o entre máquinas.

16.27. Misma respuesta que en el Problema 16.26.

16.28. Al nivel 0.05 hay diferencia significativa en términos del tipo de maíz, pero no en términos del terreno.

16.29. Al nivel 0.01 no hay diferencia significativa según el tipo de maíz ni del tipo de terreno.

- 16.30. Al nivel 0.05 hay diferencia significativa entre los neumáticos y entre los automóviles.
- 16.31. Al nivel 0.01 no hay diferencia significativa entre los neumáticos ni entre los automóviles.
- 16.32. Al nivel 0.01 hay diferencia significativa entre los métodos, pero no entre los colegios.
- 16.33. No hay diferencia significativa ni en el color del cabello ni en la altura.
- 16.34. Misma respuesta que en el Problema 16.33.
- 16.35. Al nivel 0.05 hay diferencia significativa debida a los lugares, pero no debida a los fertilizantes.
- 16.36. Al nivel 0.01 no hay diferencia significativa debida a los lugares ni a los fertilizantes.
- 16.37. Hay diferencia significativa entre operarios, no entre máquinas.
- 16.38. No hay diferencia significativa ni entre terrenos ni entre fertilizantes.
- 16.39. Misma respuesta que en el Problema 16.38.
- 16.40. No hay diferencia significativa debida a diferencias en altura, color del cabello o lugar de nacimiento.
- 16.41. Hay diferencia significativa en términos de las especies de gallinas y de las cantidades del primer producto, pero no en el segundo ni en el peso inicial de las gallinas.
- 16.42. Hay diferencia significativa debida al tipo de cable, pero no debida a los operarios, a las máquinas o a las empresas.
- 16.43. No hay diferencia significativa a ninguno de los niveles.
- 16.44. No hay diferencia significativa a ninguno de los niveles.
- 16.46. Al nivel 0.05 hay una diferencia en los resultados debida tanto al grado de veteranía como al IQ.
- 16.47. Al nivel 0.01 la diferencia en los resultados debida a la veteranía no es significativa, pero sí lo es la debida al IQ.
- 16.48. No hay diferencias significativas en términos de los lugares de procedencia de los estudiantes, pero sí en términos del IQ.
- 16.49. Misma respuesta que en el Problema 16.48.
- 16.53. Al nivel 0.05 hay una diferencia debida tanto a los productos como a los lugares.
- 16.54. Al nivel 0.05 hay diferencia en los resultados debida a los lugares, pero no a los fertilizantes.
- 16.55. Al nivel 0.01 no hay diferencia debida a los lugares ni a los fertilizantes.
- 16.56. No hay diferencia significativa debida a los factores 1 y 2, ni a los tratamientos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
- 16.58. No hay diferencia significativa debida a los factores ni a los tratamientos.

## CAPITULO 17

- 17.26. Hay diferencia al nivel 0.05, no al 0.01.
- 17.27. Sí.
- 17.28. El programa es eficaz al nivel 0.05.
- 17.29. Podemos rechazar la hipótesis de crecimiento en las ventas al nivel 0.05.
- 17.30. No.
- 17.31. (a) Rechazar; (b) aceptar; (c) aceptar; (d) rechazar.
- 17.34. No hay diferencia al nivel 0.05.
- 17.35. No.
- 17.36. (a) Sí; (b) sí.
- 17.37. Sí.
- 17.38. (a) Sí; (b) sí.
- 17.41. 3.
- 17.42. 6.
- 17.49. No hay diferencia significativa en ninguno de los niveles.
- 17.50. La diferencia es significativa al nivel 0.05, pero no al 0.01.
- 17.51. La diferencia es significativa al nivel 0.05, pero no al 0.01.
- 17.52. Hay diferencia significativa entre las calificaciones en ambos niveles.
- 17.55. (a) 8; (b) 10.
- 17.56. (a) 10; (b) las respuestas son aleatorias al nivel 0.05.
- 17.62. La muestra no es aleatoria al nivel 0.05. Hay *demasiadas* rachas, que indican un esquema cíclico.
- 17.63. La muestra no es aleatoria al nivel 0.05. Hay *demasiado pocas* rachas, lo que indica un esquema de tendencia.
- 17.64. Los dígitos son aleatorios al nivel 0.05.
- 17.65. (a) Los dígitos son aleatorios al nivel 0.05; (b) los dígitos son aleatorios al nivel 0.05.
- 17.69. (a) 0.67; (b) los jueces no coincidieron demasiado bien en sus elecciones.

## CAPITULO 18

- 18.22. (a) Cíclico; (b) estacional; (c) a largo término; (d) irregular; (e) a largo término.
- 18.23. (a) 0.5, -0.5, -0.5, 0.5, 0.5, -0.5, -0.5, 0.5; (b) 0,  $-\frac{1}{3}$ , 0,  $\frac{1}{3}$ , 0,  $-\frac{1}{3}$ , 0; (c) 0, 0, 0, 0, 0, 0; (d)  $\frac{1}{2}$ , 0,  $-\frac{1}{2}$ , 0,  $\frac{1}{2}$ .
- 18.28. (b) 0, -0.5, 0, 0.5, 0, -0.5, 0; (c)  $-\frac{1}{6}$ ,  $-\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $-\frac{1}{6}$ ,  $-\frac{1}{6}$ ; (d) 0, 0, 0, 0, 0.
- 18.30. (a) 20; (b) 21; (c) 196.

## CAPITULO 19

- 19.41. (a) 130.3; (b) 105.4, 91.9; (c) 95.6, 104.9, 99.5, 109.4, 105.9, 115.2, 124.6, 100.5.
- 19.45. (a) 100, 106, 93, 98, 108, 111; (b) 97, 102, 90, 95, 105, 108.
- 19.46. (a) 120; (b) 137.
- 19.47. (a) 200; (b) 150.
- 19.48. (a) 83.6, 88.8, 92.5, 96.1, 97.9, 99.6, 100.0, 97.6, 100.7, 105.3, 107.6, 109.5.  
(b) 94.6, 100.6, 104.8, 108.8, 110.9, 112.8, 113.2, 110.6, 114.0, 119.2, 121.9, 123.9.
- 19.49. (a) 100, 140, 112, 96; (b) 104, 146, 117, 100; (c) 89.3, 125, 100, 85.7.
- 19.50. (a) 2.86; (b) 4.00; (c) 2.74 millones de toneladas cortas.
- 19.51. 5% de crecimiento.
- 19.52. (a) 100, 96, 92, 88, 84; (b) 104, 100, 96, 92, 98.
- 19.53. (a) 100; (b) 74.1, 66.7, 80.0, 100 y 80.0, correspondientes a los años 1981-1985, respectivamente;  
(c) 101, 90.9, 109, 136 y 109, correspondientes a los años 1981-1985, respectivamente.
- 19.78. \$214.04.



Apéndice 1

Ordinadas (Y) de la curva normal canónica en z



Apéndices

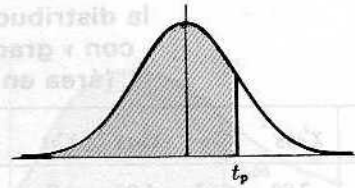
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989	3989
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3940	3935	3931	3926
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3837	3828
0.3	3818	3807	3794	3781	3769	3755	3741	3727	3712	3698
0.4	3683	3668	3651	3635	3618	3601	3584	3567	3549	3532
0.5	3521	3503	3483	3463	3442	3421	3400	3378	3355	3332
0.6	3317	3293	3268	3242	3215	3188	3160	3131	3102	3072
0.7	3042	3011	2979	2945	2910	2874	2837	2799	2760	2720
0.8	2680	2638	2594	2548	2501	2453	2404	2354	2302	2250
0.9	2207	2153	2097	2039	1979	1917	1854	1789	1723	1656
1.0	1588	1524	1458	1390	1320	1249	1176	1101	1025	948
1.1	870	798	723	646	567	486	403	318	231	143
1.2	63	-44	-111	-176	-238	-298	-356	-411	-464	-515
1.3	-564	-621	-675	-726	-774	-819	-861	-901	-938	-972
1.4	-1003	-1038	-1070	-1100	-1128	-1154	-1178	-1200	-1219	-1235
1.5	-1249	-1261	-1271	-1279	-1285	-1289	-1291	-1292	-1292	-1291
1.6	-1289	-1285	-1279	-1271	-1261	-1249	-1235	-1219	-1200	-1178
1.7	-1154	-1128	-1099	-1068	-1035	-1000	-963	-924	-883	-840
1.8	-798	-753	-706	-657	-607	-556	-503	-448	-391	-332
1.9	-272	-213	-152	-89	-25	40	94	146	196	243
2.0	287	344	400	454	506	556	604	650	694	736
2.1	776	813	848	881	912	941	968	993	1016	1037
2.2	1056	1073	1088	1101	1112	1121	1128	1133	1136	1137
2.3	1137	1136	1133	1128	1121	1112	1101	1088	1073	1056
2.4	1037	1016	993	968	941	912	881	848	813	776
2.5	736	694	650	604	556	506	454	400	344	287
2.6	229	172	113	53	-7	-56	-103	-146	-186	-223
2.7	-257	-292	-323	-351	-376	-398	-417	-433	-446	-456
2.8	-463	-471	-476	-479	-479	-476	-471	-463	-453	-441
2.9	-428	-415	-400	-383	-364	-343	-320	-295	-268	-239
3.0	-209	-179	-147	-113	-77	-39	0	39	77	113
3.1	147	179	209	229	246	260	271	279	284	287
3.2	287	284	279	271	260	246	229	209	179	147
3.3	113	77	39	0	-39	-77	-113	-147	-179	-209
3.4	-229	-246	-260	-271	-279	-284	-287	-287	-284	-279
3.5	-260	-271	-279	-284	-287	-287	-284	-279	-271	-260
3.6	-246	-229	-209	-179	-147	-113	-77	-39	0	39
3.7	77	113	147	179	209	229	246	260	271	279
3.8	279	284	287	287	284	279	260	246	229	209
3.9	179	147	113	77	39	0	-39	-77	-113	-147
4.0	77	39	0	-39	-77	-113	-147	-179	-209	-229





Apéndice III

Valores percentiles ( $t_p$ ) para la distribución t de Student con  $v$  grados de libertad (área en sombra =  $p$ )

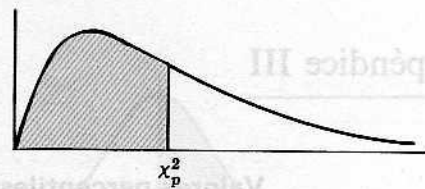


$v$	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	.171	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
$\infty$	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

Fuente: R. A. Fisher y F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (5.ª edición), Tabla III, Oliver y Boyd Ltd., Edinburgo, con autorización de los autores y editores.

## Apéndice IV

Valores percentiles ( $\chi^2_p$ ) para  
la distribución ji-cuadrado  
con  $\nu$  grados de libertad  
(área en sombra =  $p$ )

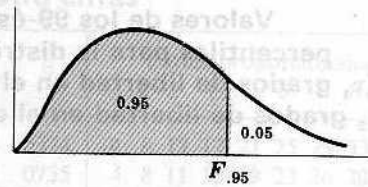


$\nu$	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

Fuente: Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the  $\chi^2$  distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), con autorización del autor y del editor.

Apéndice V

Valores de los 95-ésimos percentiles para la distribución F ( $v_1$  grados de libertad en el numerador) ( $v_2$  grados de libertad en el denominador)

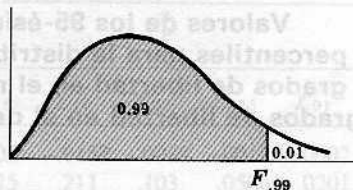


$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Fuente: E. S. Pearson y H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2 (1972), Tabla 5, página 178, reproducción autorizada.

Apéndice VI

Valores de los 99-ésimos percentiles para la distribución F  
 ( $v_1$  grados de libertad en el numerador)  
 ( $v_2$  grados de libertad en el denominador)



$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
$\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Fuente: E. S. Pearson y H. O. Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 2 (1972), Tabla 5, página 180, reproducción autorizada.

Apéndice VII

Logaritmos decimales con cuatro cifras

N											Partes proporcionales								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9



## Logaritmos decimales con cuatro cifras (continuación)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Apéndice I Logaritmos decimales con cuatro cifras (Continuación)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

## Apéndice VIII

Valores de  $e^{-\lambda}$   
( $0 < \lambda < 1$ )

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8270
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5220	.5169	.5117	.5066	.5016
0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.4771	.4724	.4677	.4630	.4584	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

( $\lambda = 1, 2, 3, \dots, 10$ )

$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	.36788	.13534	.04979	.01832	.006738	.002479	.000912	.000335	.000123	.000045

*Nota:* Para obtener valores de  $e^{-\lambda}$  para otros valores de  $\lambda$ , usar las leyes de la función exponencial.

**Ejemplo:**  $e^{-3.48} = (e^{-3.00})(e^{-0.48}) = (0.04979)(0.6188) = 0.03081$ .

Apéndice IX

Números aleatorios

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

# Indice

- Abscisa, 5
- Agrupados, datos, 38  
métodos de compilación (véase Método de compilación)
- Ajuste de curvas, a mano, 291, 444, 452  
ecuaciones especiales usadas en el, 290  
métodos de mínimos cuadrados, 289-321
- Ajuste de datos, 163, 180-183 (véase Ajuste de curvas)  
por distribución binominal, 180  
por distribución de Poisson, 182, 183  
por distribución normal, 180, 182  
usando papel gráfico, 163, 180
- Ajuste de datos a las variaciones estacionales, 446, 461
- Aleatorio, 56, 414
- Aleatorización completa, 386
- Aleatorizados, bloques, 387
- Análisis combinatorio, 134, 148-152  
probabilidad y, 148-152
- Análisis de series en el tiempo, 440-477 (véase Series en el tiempo)  
pasos fundamentales en el, 447
- Análisis de varianza, 375-410  
con réplicas, 383-387  
cuadrados greco-latinos, 387, 401-403  
cuadrados latinos, 387  
experimentos de dos factores usando, 380-387, 394-399  
experimentos de un factor usando, 375, 387-394  
*F* test, 379, 380, 383-387, 390-396  
modelo matemático, 377, 384  
propósito del, 375  
tablas, 379, 383, 385
- Antilogaritmos, 8, 27-30 (véase Logaritmos)
- Aproximación normal a la distribución binomial, 162, 175-178
- Apuestas, 129
- Areas de la distribución, ji-cuadrado, 254, 538  
*F*, 256, 539, 540  
normal, 160, 161, 169-172, 536  
*t*, 251, 252, 537
- Aritmética, media, 61-65, 68-75  
calculada mediante datos agrupados, 62, 64, 72-75  
comprobación Charlier, 95, 106  
de distribuciones de probabilidad, 143  
de medias aritméticas, 62, 69, 70  
efecto de los valores extremos sobre la, 68, 70, 76  
intervalo de confianza para la, 209, 210, 214-216  
método de compilación, 63, 74, 75  
métodos largos y cortos para su cálculo, 63, 74  
poblacional y muestral, 133  
ponderada, 62, 68-70  
propiedades, 62, 63, 71  
relación con las medias geométricas y armónica, 65, 66, 80, 81  
relación con mediana y moda, 64, 65, 80  
supuesta o conjeturada, 63, 72
- Armónica, media, 61, 65, 82, 83  
ponderada, 83  
relación con las medias aritmética y geométrica, 65, 81
- Asimetría (sesgo), 42, 118-120, 125  
coeficiente cuartil de, 118, 125  
coeficiente de, 118  
coeficiente percentil 10-90 de, 118, 125  
coeficiente de Pearson, 118, 125  
negativa (a la izquierda), 42, 118  
para la distribución binomial, 160, 161  
para la distribución de Poisson, 162  
positiva (a la derecha), 42, 118
- Asimétricas, curvas de frecuencia, 42
- Asintóticamente normal, 188
- Atributos, correlación de, 272, 284, 328
- Autocorrelación, 328
- Base, 3  
de logaritmos comunes, 7  
de logaritmos naturales, 36
- Bayes, teorema o regla de, 158
- Bernoulli, James, 160
- Binomial, desarrollo o fórmula, 159, 165

- Binomial, distribución, 159, 161, 163-170
  - ajuste de datos, 180
  - propiedades, 159, 161
  - relación con la distribución de Poisson, 162, 178
  - relación con la distribución normal, 161, 175-178
  - test (contraste) de hipótesis usando la, 228, 245-248
- Binomiales, coeficientes, 159, 165
  - triángulo de Pascal, 165, 166
- Bivariable:
  - distribución de frecuencia o tabla, 329, 342
  - distribución normal, 329
  - población, 329
- Bloques, 370-387
  - aleatorizados, 386
- Bondad del ajuste, 163 (véase Ajuste de datos)
  - test ji-cuadrado, 269, 278, 279
- Canónica, curva normal (véase Normal, curva)
- Cantidad (o volumen), números índice de, 485, 502, 503
- Característica, 7, 27, 28
- Categorías, 37
- Centro de gravedad, 293
- Centroide, 293
- Cero, punto, 5
- Cesta de la compra, 497
- Charlier, comprobación de, 95, 106, 117, 124
  - para la media y la varianza, 95, 106
  - para momentos, 118, 124
- Cíclicos, movimientos o variaciones, 441, 445, 446, 461-466
- Ciclos financieros, 441
- Clase, 37 (véase Intervalos de clase)
- Clase modal, 45, 64
  - frecuencia, 45, 64
- Claúsulas de revisión, 478
- Cociente de inteligencia, 105, 106
- Coefficiente de correlación de orden cero, 358
- Coefficiente de correlación de rango, 416, 433-435
- Coefficiente de curtosis, 119, 126 (véase Curtosis)
  - de asimetría, 119 (véase Asimetría)
- Coefficiente de determinación múltiple, 359, 367, 368
- Coefficiente percentil de curtosis, 119, 126
- Coefficiente de confianza, 210, 252
- Coefficiente de correlación, 325-329, 338-350 (véase Correlación)
  - de tablas de contingencia, 272, 284
  - fórmula momento-producto, 327, 338-345
  - líneas de regresión y, 328, 344-347
    - para datos agrupados, 328, 341-345
    - series en el tiempo y, 328, 346
    - teoría del muestreo y, 329, 349, 350
- Coincidencias, en el  $H$  test de Kruskal-Wallis, 413
  - en el  $U$  test de Mann-Whitney, 412
- Combinaciones, 135, 146-149
- Comparación de datos, 446, 466
- Compuesto, interés, 82
- Comunes (decimales), logaritmos, 7, 8, 27-30
  - tabla, 541, 542
- Conjunto vacío, 136
- Constantes, 1
  - dólares, 505, 506
- Contingencia, coeficiente de, 272, 283, 284
- Contingencia, tablas de, 270-272, 279-285
  - coeficiente de correlación, 272, 284
  - fórmulas para ji-cuadrado, 270, 272, 282, 283
- Continua, variable, 1, 9
- Contraste (test) de hipótesis y significación, 223-250, 253, 254, 257, 260, 263, 264
  - con la distribución binomial, 228, 245-248
  - con la distribución  $F$  (véase Distribución  $F$ )
  - con la distribución ji-cuadrado (véase Distribución ji-cuadrado)
  - con la distribución normal, 224, 226 228-234
  - con la distribución  $t$  (véase Distribución  $t$ )
  - en relación con correlación y regresión, 328-331
  - para diferencias de medias y proporciones, 227, 228, 241-245
    - para medias y proporciones, 225-234
- Control de calidad, gráficos de, 227, 240, 241
- Coordenadas rectangulares, 5, 15-19
- Correlación, 322-356 (véase Regresión)
  - auto-, 329
  - coeficiente de (véase Coeficientes de correlación)
  - de atributos, 272, 284, 329
  - lineal, 322
  - medidas de, 323
  - múltiple (véase Correlación múltiple)
  - parcial, 357-374
    - positiva y negativa, 323
    - rango, 416, 433-435
    - simple, 322, 355
    - sin sentido o espúrea, 326
    - tetracórica, 272
- Correlación múltiple, 357-374
  - coeficiente de, 359, 367, 368
- Correlación parcial, 357-374
  - coeficientes de, 361, 368, 369
- Correlación sin sentido, 326
- Correlación, tabla de, 327, 344

- Covarianza, 327, 339  
 coeficiente de correlación en términos de, 327
- Crítica(os):  
 región, 225  
 valores, 210, 253
- Cuadrantes, 5
- Cuadrática, curva, 289
- Cuadrática, ecuación, 35  
 fórmula para la solución, 35
- Cuadrática, función, 17, 290  
 mínimo de la, 110
- Cuadrática, media, o raíz de la media del cuadrado,  
 65, 83  
 relación con la media geométrica, 84
- Cuantiles, 66
- Cuártica, curva, 289  
 función, 290
- Cuartil, coeficiente, de dispersión relativa, 110  
 de asimetría, 119, 125
- Cuartil, desviación (*véase* Semi-intercuartil, rango)
- Cuartiles, 66, 84-86  
 de datos agrupados, 66  
 errores típicos para, 191
- Cúbica, curva, 289  
 función, 290
- Curtosis (o aplastamiento), 119, 120, 126  
 coeficiente de, 119, 125  
 coeficiente percentil de, 119, 125  
 de la distribución binomial, 160  
 de la distribución de Poisson, 162  
 de la distribución normal, 119, 161
- Curva de frecuencia bimodal, 42
- Curva de frecuencias en forma de J, 42  
 invertida, 42
- Curva de Gompertz, 290
- Curva de potencia, 237 (*véase* Curvas de operación  
 características)
- Curvas de aproximación, ecuaciones de las, 289, 290
- Curvas de frecuencia, 41, 42, 55, 56  
 relativa, 41  
 tipos de, 42
- Curvas de frecuencia asimétricas, 42, 64
- Curvas de operación características, 227, 235-240,  
 245, 247
- Datos ajustados estacionalmente, 446, 461
- Datos continuos, 1, 8, 9  
 representación gráfica, 54, 55
- Datos, continuos (*véase* Datos continuos)  
 agrupados, 38  
 ajustados a las variaciones estacionales, 446, 461  
 comparación de, 446, 466  
 discretos (*véase* Discretos, datos)  
 dispersión de (*véase* Dispersión)  
 extensión o variación de, 70 (*véase* Dispersión;  
 Variación)  
 fila, 37  
 redondeo de (*véase* Redondeo de datos)
- Deciles, 66, 84-86  
 errores típicos, 191  
 para datos agrupados, 52, 83-86
- Decisión, reglas de, 223 (*véase* Decisiones estadísticas)
- Decisiones estadísticas, 223-225  
 hipótesis (*véase* Hipótesis)  
 inferencia, 1, 186, 208
- Deductiva, estadística, 1
- Deflación de series en el tiempo, 486, 505, 506
- Descriptiva, estadística, 1
- Desigualdad, símbolos de, 6
- Desigualdades, 6, 7
- Desviación de la media aritmética, 61, 71  
 cuartil (*véase* Semi-intercuartil, rango)  
 curva de mínimos cuadrados, 291  
 media (*véase* Media, desviación)  
 típica (*véase* Desviación típica)
- Desviación típica, 91-96, 100-112  
 corregida (*véase* Sheppard, corrección de)  
 de datos agrupados, 92, 94, 101-108  
 de distribuciones de muestreo, 187-192 (*véase*  
 Errores típicos)  
 de una distribución de probabilidad, 143  
 intervalo de confianza, 212, 219, 221  
 método de compilación, 94, 105, 106  
 métodos breves para su cálculo, 94, 101-106  
 propiedad de mínimo, 94, 110  
 propiedades de, 94, 108-110  
 relación con la desviación media y el rango semi-  
 intercuartil, 96, 108  
 relación de población y muestreo, 92
- Determinación, coeficientes de, 325, 338  
 múltiple, 359, 367, 368
- Diagrama de dispersión, 289, 331-335  
 tridimensional, 358
- Diagrama de Euler, 135, 152-155
- Diagramas (*véase* Gráfico)
- Dicotomía, clasificación por, 268  
 10-90, rango percentil, 92, 99
- Discreta, variable, 1, 8, 9
- Discretas, distribuciones de probabilidad, 132
- Discretos, datos, 1  
 representación gráfica de, 54

- Diseño de experimentos, 186, 386
- Dispersión, 66 (véase Variación)
  - absoluta, 96, 110, 111
  - coeficiente de, 96, 110, 111
  - medidas de, 91-115
  - relativa, 96, 110, 111
- Dispersión absoluta, 96, 110, 111 (véase Dispersión)
- Distribución de Bernoulli (véase Binomial, distribución)
- Distribución de Poisson, 162, 178-180
  - ajuste de datos con la, 182, 183
  - propiedades, 162
  - relación con las distribuciones binomial y normal, 162
- Distribución de probabilidad acumulada, 132
- Distribución *F*, 255, 256 (véase Análisis de varianza)
- Distribución gaussiana (véase Distribución normal)
- Distribución ji-cuadrado, 254, 261-264 (véase Ji-cuadrado)
  - contraste de hipótesis y significación, mediante la, 268-288
  - intervalos de confianza usando, 254, 255, 262, 263
  - tabla de percentiles para la, 538
- Distribución modelo o teórica, 163
- Distribución normal, 95, 108, 109, 159-162, 169-178 (véase Normal, curva)
  - ajuste de datos con la, 181, 182
  - contraste de hipótesis y significación usando la, 224-241
  - forma canónica, 160
  - proporciones de, 160, 162
  - relación con la binomial, 162, 175-178
  - relación con la de Poisson, 162
- Distribución *t*, 251, 256-260
  - contraste de hipótesis y significación, usando la, 256-260
  - en teoría muestral de correlación y regresión, 328-332, 349, 351
  - intervalos de confianza usando la, 252, 253, 257
  - tabla de valores percentiles, 537
- Distribuciones continuas de probabilidad, 133, 141, 143
- Distribuciones de frecuencias (véase Frecuencias, distribuciones de)
  - muestreo (véase Muestreo, distribuciones de)
  - probabilidad, 56, 132, 133, 141-143
  - unimodal, 64
- Dominio de una variable, 1, 9
- Ecuaciones, 5, 25, 26
  - cuadráticas, 35
  - de curvas aproximantes, 289, 290
  - de regresión, 357-366
  - equivalentes, 6, 26
  - miembros izquierdo y derecho de, 5
  - normales (véase Normales, ecuaciones)
  - simultáneas, 6, 25, 26
  - solución de, 6
  - transposición en, 25
- Ecuaciones simultáneas, 5, 25, 26
- Edad cronológica, 105
- Edad mental, 105
- Eficientes, estimadores y estimaciones, 209, 213
- Ejes *X*, *Y* del sistema de coordenadas rectangulares, 5
- Elástica, demanda, 497
- Eliminación de incógnitas (véase Ecuaciones simultáneas)
- Empírica, relación, entre media, mediana y moda, 64, 80
  - entre medidas de dispersión, 96, 108-110
- Entrada simple, tabla de, 44
- Enumeración, 2, 3
- Error de agrupamiento, 39, 50
- Error típico de estimación, 324, 334-337, 359, 366-367
  - modificado, 325
- Errores, de agrupamiento, 39, 50
  - de tipos I y II (véase Errores de tipo I y II)
  - probables, 212, 220
  - redondeo de, 2, 9
  - típicos (véase Errores típicos)
- Errores aleatorios, 377, 382, 384
- Errores de redondeo acumulados, 2, 9
- Errores de tipo I y II, 224, 230-232, 235, 240, 243, 245
  - curva de operaciones característica y, 227, 235-240, 246
- Errores típicos, de distribuciones de muestreo, 189-191
  - tabla, para diversos estadísticos, 191
- ESP (véase Percepción extrasensorial)
- Espacio 4-dimensional, 360
- Esperanza matemática, 133, 143, 144
- Espúrea, correlación, 326
- Esquema cíclico, en el test de peldaños (o rachas), 415, 429
- Estacionales, variaciones, 442, 444, 446
- Estadística, 1, 186, 208
  - deductiva o descriptiva, 1
  - definición, 1
  - inductiva, 1



- muestral, 186, 208
- Estadístico  $t$ , 252
- Estadístico  $H$  ( $H$  test), 374
- Estimación, 186, 208-222, 294 (véase Estimaciones)
  - de la tendencia, 444, 451, 452
  - de variaciones cíclicas, 446, 461-466
  - de variaciones estacionales, 442, 444, 446, 452-461
  - de variaciones irregulares, 446, 461-466
  - y regresión (véase Regresión)
  - y teoría del muestreo, 208-222
- Estimación óptima, 210
- Estimaciones de intervalo, 209
- Estimaciones puntuales, 210
- Estimaciones sesgadas, 208, 212
- Estimaciones, sesgadas y sin sesgo, 208, 210, 212, 213 (véase Estimación)
  - eficiente e ineficiente, 209, 210, 212, 213
  - intervalo de confianza, 209-210 (véase Intervalos de confianza)
  - punto e intervalo, 209
- Estimadores (véase Estimaciones)
- Estocástica, variable (véase Variable aleatoria)
- Excluyentes, sucesos mutuamente, 131
- Exito, 129, 159
- Experimental, diseño, 151, 386
- Experimentos de dos factores, 380-386, 394-399
- Experimentos de factor único, 375, 387-394
- Explicada, variación, 325, 337, 338, 348
- Exponencial, curva, 290
- Exponenciales, tabla de, 544
- Exponente, 3
- Extrapolación, 296
  
- $F$  test (véase Análisis de varianza)
- Factorial, 134
  - fórmula de Stirling, 135
- Fiabilidad, 209
- Fila de datos, 37
- Fila, medias de, 375
- Fracaso, 129, 159
- Frecuencia acumulada, 40, 41
  - distribución o tabla, 40, 51-55
  - polígono, 41, 52 (véase Ogiva)
- Frecuencia de clase, 37, 39
  - acumulada, 40, 41
  - modal, 45
  - relativa, 40, 41
- Frecuencia, distribución de, 37, 59
  - acumulada, 40, 41, 51-55
  - de porcentajes o relativa, 40, 49
  - reglas para formar, 39
- Frecuencias de celda, 270, 342
- Frecuencias esperadas o teóricas, 268
- Frecuencias, histograma de (véase Histogramas)
  - relativas, 40, 49
- Fronteras de clase, inferior y superior, 38, 39
- Función, 4, 13-15
  - cuadrática (véase Cuadrática, función)
  - de distribución, 132
  - de frecuencias, 132
  - de probabilidad, 132
  - lineal, 17, 290
  - multivaluada, 4, 14
  - univaluada, 4, 14
- Función densidad, probabilidad, 132
- Función de distribución, 132
- Función de frecuencia, 132
- Función de operación característica, 237
- Función de potencia, 237
- Funciones univaluadas, 4, 14
  
- Geométrica, curva, 290
- Geométrica, media, 61, 65, 80-82
  - de datos agrupados, 65, 80
  - ponderada, 80
  - relación con las medias aritmética y armónica, 65
- Gossett, 252
- Grado  $n$ , curva de, 290
- Grados de libertad, 252, 254, 255
- Gráfico, 5, 15-24
  - circular, 5, 23, 24
  - de barras (véase Gráfico de barras)
  - de varillas, 54
  - lineal, 18, 20
- Gráfico circular, 5, 23, 24
- Gráfico de barras, 5, 20, 22, 23
  - de componentes, 19, 22
- Gráficos de control, 227, 240, 241
  - grupo, 243, 260
- Greco-latinos, cuadrados, 386, 401
  
- $H$  test de Kruskal-Wallis, 413, 427, 428
- Hipérbola, 290
- Hiperplano, 360
- Hipótesis alternativa, 223
  - contraste (test) de, 186, 224 (véase Contraste de hipótesis y significación)
  - nula, 223

- probabilidades de, usando la regla de Bayes, 158
- Histogramas, 39, 44-51
  - cálculo de medianas mediante, 64, 77, 78
  - frecuencia relativa o de porcentajes, 40, 49, 50
  - probabilidad, 141
- Hoja de recuentos, 39, 48
  
- Identidad, 6
  - propiedad de relaciones de precios, 479
- Independiente, variable, 4, 14, 15
- Independientes, sucesos, 130
- Índice del coste de vida, 478
- Índice de precios al consumo (IPC), 346, 478, 505
- Índice estacional, 445, 446, 452-460
- Índice ideal de Fisher, 484, 498, 499
  - transformación Z, 329, 350
- Índices (véase Números índice)
- Índices, notación de, 482
- Inductiva, Estadística, 1
- Ineficientes, estimadores y estimaciones, 209, 212, 213
- Ingresos reales o salarios, 486, 505
- Interacción, 384
- Interés compuesto, fórmula del, 82
- Interpolación, 7, 28, 296
  - en logaritmos y antilogaritmos, 7, 28
- Intersección de conjuntos, 136
- Intersecciones, X e Y, 291, 296, 298
- Intervalos de clase, 38, 39
  - abierto, 38
  - anchura o tamaño, 39
  - desiguales, 50
  - mediana, 63, 76, 77
  - modal, 45
- Intervalos de confianza:
  - en correlación y regresión, 307-331, 349-352
  - para desviaciones típicas, 212, 219, 220
  - para medias, 210, 214-216
  - para proporciones, 211, 216-218
  - para sumas y diferencias, 211, 212, 218, 219
  - usando la distribución ji-cuadrado, 254, 255, 263
  - usando la distribución normal, 209-212, 214-220
  - usando la distribución t, 252, 253, 257, 258
- Inversión temporal, propiedad de, 479
- IQ (véase Cociente de inteligencia)
  
- Ji-cuadrado, propiedad aditiva de, 272
  - análisis de varianza usando, 378, 379, 382
  - corrección de Yates, 271, 280, 283
  - definición, 268, 269
  - distribución (véase Distribución ji-cuadrado)
  - fórmulas para, en tablas de contingencia, 271
  - para bondad del ajuste, 269
  - test, 163, 268-288
- J invertida, distribución en forma de, 42
  
- Laspeyres, índice de, 484, 495-498
- Latinos, cuadrados, 386, 399, 401
  - ortogonales, 387
- Leptocúrtica, 119
- Límites de clase, 38
  - inferior y superior, 38
  - verdaderos, 38
- Límites de confianza, 210
- Límites fiduciales (véase Límites de confianza)
- Lineal, correlación (véase Correlación)
- Lineal, función, 17, 290
- Lineal, gráfico, 18, 19
- Logaritmos, 27-30
  - base de, 7, 27, 36
  - cálculos con, 8
  - característica, 27
  - decimales (comunes), 27
    - tabla, 541-543
  - interpolación en, 7, 28
  - mantisa, 7, 8, 28
  - naturales, 36
- Logística, curva, 290
- Log-log, papel gráfico, 290, 316
- Longitud de clase, anchura o tamaño, 38
  
- Mantisa, 7, 8, 28
- Marca de clase, 38, 39
- Marginales, frecuencias, 270, 342
- Marshall-Edgeworth, índice de, 484, 499, 500
- Media aritmética (véase Aritmética, media)
  - armónica (véase Armónica, media)
  - cuadrática (véase Cuadrática, media)
  - geométrica (véase Geométrica, media)
- Media cuadrática, 66, 83
  - desviación, 92
- Media del grupo, 376
- Media, desviación, 91, 92, 97-100
  - de la distribución normal, 161
  - para datos agrupados, 91, 98
- Media final, 376, 377, 381
- Mediana, 63, 64, 75-78

- cálculo por histogramas, 64, 77, 78
- efecto de los valores extremos, 76
- para datos agrupados, 62, 76, 77
- relación con la media aritmética y la moda, 64, 66, 80
- Medidas, 2
- Medidas de tendencia central, 60-90
- «Menor que», distribución acumulada, 51, 52
- Mesocúrtica, 119
- Método «a mano» de ajuste de curvas, 291, 444, 452
- Método de agregación, simple, 483, 492, 494
  - ponderada, 484, 495-498
- Método de compilación, para coeficientes de correlación, 327, 342
  - para el momento, 117, 122, 124
  - para la desviación típica, 93, 105, 106
  - para la media, 62, 74
- Método de promedio de relativos, simple, 483, 494, 495
  - ponderado, 484, 501
- Método de promedio ponderado de relaciones, 485, 501
- Método de recuento en el *U* test de Mann-Whitney, 414, 423
- Método de relación a la tendencia, 445, 455, 456
- Método de relación al promedio móvil, 445, 457
- Método del año base, 484
- Método del año prefijado, 484
- Método del año típico, 484
- Mínimos cuadrados:
  - curva, 292
  - parábola, 293, 294, 316-319
  - plano, 295
  - recta, 292, 293, 302-309
- Mínimos cuadrados, método de, 291 (*Véase* Ajuste de curvas)
- Moda, fórmula para la, 78, 80
  - para datos agrupados, 64, 78, 80
  - relación con la media aritmética y la mediana, 64, 65, 80
- Momento-producto, fórmula para el coeficiente de correlación, 327, 338-340
- Momentos, 116-128
  - adimensionales, 118
  - comprobación Charlier para su cálculo, 117, 124
  - correcciones de Sheppard para, 117, 126
  - definición, 116
  - método de compilación para su cálculo, 117, 122, 124
  - para datos agrupados, 116, 117, 122
  - relaciones entre, 117
- Momentos adimensionales, 118
- Movimientos a largo plazo, 441
- Movimientos característicos de serie en el tiempo, 441, 447-451
  - clasificación, 441, 442
- MQ (*véase* Media cuadrática)
- Muestra, 1, 55, 186
  - aleatoria, 56, 186
- Muestra aleatoria, 56, 186, 195-197
- Muestral, espacio, 135, 136, 152-155
- Muestral, estadística, 186, 208
- Muestreo, con sustitución, 186
  - sin sustitución, 186
- Muestreo, distribuciones de, 187-204
  - de diversos estadísticos, 189
  - de medias, 187, 190, 191
  - de proporciones, 188, 190, 197-200
  - de sumas y diferencias, 188, 200-203
  - de varianzas, 191
  - experimental, 193
- Muestreo, números de, 195, 196
- Muestreo, teoría del, 186-207, 251-267
  - de correlación, 329, 349, 350
  - de regresión, 330, 351
  - grandes muestras, 189
  - pequeñas muestras, 189, 251-267
  - uso en contraste de hipótesis y significación, 223-250
  - uso en la estimación, 208-222
- Multimodal, curva de frecuencia, 43
- Multinomial, desarrollo, 163
- Multinomial, distribución, 163, 179, 271
- Naturales, base de logaritmos, 36
- Negativa, correlación, 323
  - asimetría, 42, 118
- Nivel de significación, 224
  - descriptivo o experimental, 232
- Niveles de confianza, tabla de, 210
- No aleatorio, 415
- No lineal(es):
  - correlación y regresión, 323, 326, 347-349, 361
  - ecuaciones reducibles a forma lineal, 293, 315-316
  - regresión múltiple, 361
  - relaciones entre las variables, 289, 293
- Normal, curva, 42, 160 (*véase* Distribución normal)

- área bajo la, 160, 169-175, 536
- forma canónica (o estándar), 160
- ordenadas de las, 161, 172, 535
- papel gráfico, 163, 180
- Normales, ecuaciones, de la recta de mínimos cuadrados, 292, 293, 302-309
- de la parábola de mínimos cuadrados, 293, 294, 316-319
- de plano de mínimos cuadrados, 295, 358
- Normas de cálculo, 4, 10-13
  - usando logaritmos, 7, 29, 30
- Notación científica, 2, 10
- Nula, hipótesis, 223, 377, 379
- Números aleatorios, 186, 195, 196
  - tabla de, 545
  - uso de, 195, 196
- Números índice, 478-510
  - aplicaciones, 478
  - cíclicos, 446
  - definición, 478
  - de cantidad o volumen, 485, 502
  - de precios, 478, 482-484, 492-501
  - estacionales, 445, 452-461
  - problemas en su cálculo, 481, 482
  - test teóricos para, 482
  - valor, 486, 502, 503
- Números índice cíclicos, 446
- «O más», distribución acumulada, 41, 51-53
- Observadas, frecuencias, 268
  - OC curvas (véase Curvas de operación características)
- Ogivas, 40-42, 51-57
  - de porcentajes, 41, 51, 52
  - deciles, percentiles y cuartiles obtenidos de las, 84-86
  - mediana obtenida de las, 77, 78
  - «menor que», 41, 51-53
  - «o más», 41, 53
  - suavizadas, 42, 55, 56
- Ogivas de porcentajes, 41, 51, 52
  - suavizadas, 55, 56
- Ordenaciones, 37, 43, 44
- Ordenadas, 5
  - de la curva normal, 161, 172
- Origen, del sistema rectangular de coordenadas, 5
  - de series en el tiempo, 311
- Ortogonal, cuadrado latino, 386
- Paasche, índice de, 484-486, 495-501, 504
- Papel gráfico, log-log, 290, 316
- probabilidad, 163, 180
  - semilog, 290
- Parábola, 17, 290
  - de mínimos cuadrados, 293, 294, 316-319
- Parámetros, estimación de, 208, 209 (véase Estimación)
  - de población, 208, 209
- Pascal, triángulo de, 165, 166
- Pearson, coeficiente de asimetría de, 118, 125
- Pendiente de una recta, 291, 298
- Percentil, rango (10-90), 92, 99
- Percentiles, 66, 84-86
  - de datos agrupados, 66, 84-86
  - de la distribución  $F$ , 256, 539, 540
  - de la distribución ji-cuadrado, 255, 258
  - de la distribución  $t$ , 252, 256, 257, 537
- Percepción extrasensorial, 232
- Período base de números índice, 478
  - cambio de, 486, 503, 504
- Permutaciones, 134, 135, 144-146
  - circulares, 146
- Pictogramas, 5, 18
- Plano de mínimos cuadrados, 295
  - $XY$ -, 5
- Platicúrtica, 119
- Población, 1, 186
  - finita o infinita, 187
  - parámetros de, 208, 209
- Poder adquisitivo, 486, 505, 506
- Polígonos de frecuencia, 39, 44-51
  - de porcentajes o relativa, 40, 49
  - suavizadas, 41, 55, 56
- Polinomios, 290
- Ponderación, factores de, 62
- Ponderada(o):
  - media aritmética, 61, 68-71
  - media armónica, 82
  - media geométrica, 80
  - promedio móvil, 444
- Ponderada, método de agregación, 484, 495-498
- Porcentaje(s):
  - distribución acumulada, 40, 52
  - distribución, 40
  - frecuencia acumulada, 40, 52
  - gráfico de componentes, 19
  - histograma, 39
  - método de la tendencia, 445, 455, 456
- Positiva, correlación, 322
  - asimetría, 42, 118
- Potencia de un test, 227
- Precios, índice de (véase Números índice)

- Precios, relaciones de, 478, 479, 486-490  
 notación, 478  
 propiedades, 479
- Predicción meteorológica, 294, 446, 466-468
- Probabilidad, 56, 129-158  
 análisis combinatorio y, 134, 148-152  
 axiomática, 130  
 condicional, 130  
 curvas, 56  
 definición clásica, 129  
 definición como frecuencia relativa, 129  
 distribuciones, 56, 132  
 empírica, 130  
 papel gráfico, 163, 180  
 reglas fundamentales, 136-140  
 relación con la teoría de conjuntos, 135, 136
- Probabilidad condicional, 130
- Probabilidad, distribuciones de, 132, 141-142  
 acumuladas, 132  
 continuas, 130  
 discreta, 132
- Probabilidad empírica, 130
- Probabilidad, función de, 132
- Probable, error, 212, 220
- Progresión aritmética, momentos de una, 127  
 varianza de, 114
- Promedio, 60, 68 (véase Semi-promedios)  
 desviación (véase Desviación media)  
 método de porcentajes, 445, 452-454  
 móvil, 443, 444 (véase Móvil, promedio)
- Promedio móvil centrado, 445, 449, 450
- Promedios móviles, 443, 444, 447-451  
 centrados, 445, 447-451  
 método de porcentajes, 445, 457  
 ponderados, 444
- Propiedad cíclica de las relaciones de precios, 479
- Propiedad circular de las relaciones de precios, 479
- Propiedad del factor inverso, 480, 502, 503
- Proporciones, 188, 189, 191, 197-200, 211, 212, 216-218, 226-233  
 contraste de hipótesis, 226-233  
 distribución muestral, 187, 188  
 intervalo de confianza para, 211, 212, 216-218
- Quintiles, 85
- Rachas (o peldaños), aplicaciones de, 415, 416, 432  
 definición, 414  
 test del carácter aleatorio, 414, 415, 429-432
- Rango, 38  
 10-90 percentil, 92, 99  
 intercuartil, 92  
 semi-intercuartil, 92, 99, 119
- Rango intercuartil, 92  
 semi-, 92, 99, 119
- Recta, 289-293, 295-303  
 ecuación, 289, 290, 295, 297  
 de mínimos cuadrados, 291, 292  
 de regresión, 295  
 pendiente, 291, 297
- Recuentos o enumeraciones, 2, 3
- Redondeo de datos, 2, 9
- Redondeo, errores de, 2, 9
- Región de aceptación, 225, 230
- Regresión, 294, 322, 323, 328, 357-366  
 curva de, 294  
 múltiple, 322, 357  
 plano de, 294, 357, 358  
 recta de, 294, 303, 307, 308, 323, 324 (véase Recta de mínimos cuadrados)  
 simple, 322  
 superficie de, 295  
 teoría de muestreo, 330
- Relaciones de cantidad, 480, 490, 491
- Relaciones de enlace, 445, 457-460, 481, 492
- Relaciones de precios (véase Precios, relaciones de)
- Relativa, dispersión o variación, 96, 110, 111
- Relativa, frecuencia, 40, 49  
 curvas, 41  
 definición de probabilidad, 129  
 distribución, 39  
 tabla, 39
- Réplicas, 375, 382
- Residual, 291  
 variación, 382
- Riesgo, 198
- Secular, tendencia o variación, 441
- Semi-intercuartil, rango, 92, 99, 119
- Semilog, papel gráfico, 290
- Semimedianas, 451
- Semipromedios, método de los, 444, 451, 452
- Serie de índices, 478-487 (véase Números índice)
- Series en el tiempo, 440-477  
 ajuste de curvas para, 294, 309-315  
 análisis de, 440-477  
 correlación de, 328, 346  
 deflación, 486, 505, 506  
 gráficos, 19

- movimientos característicos, 440, 447-451  
 predicción meteorológica, 294, 446, 466-468  
 suavización, 443  
 Sheppard, corrección de, para los momentos, 117, 124, 126  
 para la varianza, 95, 106-108  
 Significación, nivel de (*véase* Nivel de significación)  
 test de (*véase* Contraste de hipótesis y significación)  
 Significativos, dígitos o cifras, 3, 10  
 Signos, test de los, 411, 412, 416-419  
 Simétrica o en forma de campana, curva, 42  
 Simple, correlación, 322-356  
 Simple, método de agregación, 483, 492, 493  
 Simple, método de promedio de relaciones, 483, 494, 495  
 Solución de ecuaciones, 6  
 Spearman, fórmula de, para correlación de rango, 416, 433-435  
 Standard, recuentos, 96, 111, 112, 169  
 unidades, 96, 169, 172-176  
 Stirling, aproximación de  $n!$ , 135  
 «Student», distribución de (*véase* Distribución  $t$ )  
 Suavización de series en el tiempo, 443  
 Subíndices, notación de, 60, 357, 362  
 Suceso compuesto, 130  
 Sucesos, 129, 130  
 compuestos, 130  
 dependientes, 130  
 independientes, 130  
 mutuamente excluyentes, 131  
 probabilidad de (*véase* Probabilidad)  
 Sucesos dependientes, 130  
 Suma, notación de, 60, 66, 67  
 Superficie de regresión, 295  
 Superíndices, notación de, 482  
  
 Tabla de entrada simple, 43  
 Tabla de frecuencias (*véase* Distribuciones de frecuencias)  
 acumuladas, 41, 52, 53  
 relativas, 40  
 Tabla de partes proporcionales para logaritmos, 541-543  
 Tendencia, curva o línea de, 294, 310, 441-443  
 Tendencia, esquema de la, 415, 430  
 Tendencia, estimación de la, 446, 451, 452  
 secular, 441  
 Tendencia, valores de, 311, 451-453  
  
 Teorema del límite central, 187  
 Teoría de pequeñas muestras, 190, 251-267  
 Teóricas, frecuencias, 268  
 Test (contrastes), bilateral o de dos colas, 225  
 Test estadístico, 225  
 Test unilateral o de una cola, 226  
 Tests no paramétricos, 411-439  
 $H$  test de Kruskal-Wallis, 413, 427  
 para la correlación, 416, 433-435  
 test de los signos, 411, 412, 416-419  
 test de rachas (o peldaños), 414-416, 429-433  
 $U$  test de Mann-Whitney, 412, 416, 420-427  
 Tetracórica, correlación, 272  
 Totales móviles, 443, 447-449  
 Transposición, en ecuaciones, 25  
 en desigualdades, 27  
 Tratamiento, 376, 380  
 medias, 376  
  
 $U$  test de Mann-Whitney, 412, 416, 420-427  
  
 Valor absoluto, 91  
 Variable, 1, 2, 4, 8, 9  
 aleatoria (*véase* Variable aleatoria)  
 continua, 1, 9  
 dependiente, 4, 14, 15  
 discreta, 1, 8, 9  
 distribuida normalmente, 161  
 dominio, 1, 9  
 estocástica (*véase* Variable aleatoria)  
 independiente, 4, 14, 15  
 tipificada, 96, 111  
 Variable aleatoria, 132, 136, 141, 142  
 continua, 132, 142  
 discreta, 132, 141  
 Variable independiente, 4, 14, 15  
 cambio de, en la ecuación de regresión, 360  
 Variable tipificada, 96, 111  
 Variables, relación entre, 289, 357 (*véase* Ajuste de curvas; Correlación; Regresión)  
 Variación, 70 (*véase* Dispersión)  
 aleatoria, 442-446  
 cíclica, 441, 446, 461-466  
 coeficiente cuartil de, 111  
 coeficiente de, 96, 110  
 estacional, 442, 444, 445  
 explicada e inexplicada, 325, 337, 338, 348  
 residual, 382  
 secular, 441

Variación total, 325, 337, 348, 368, 376, 381, 384  
 Variaciones aleatorias, 442, 446  
 Variaciones irregulares, 422, 443, 446 461-466  
 Varianza, 93 (véase Desviación típica)  
 análisis de (véase Análisis de varianza)  
 combinada, 95  
 comprobación Charlier, 95, 106  
 corrección de Sheppard, 95, 106-108  
 de distribuciones de probabilidad, 143  
 de distribuciones muestrales, 187-203  
 muestral modificada, 208, 212  
 relación entre población y muestra, 133  
 Varillas, gráficos de, 54



Venn, diagramas de (véase Diagramas de Euler)  
 Volumen, números índice de, 485, 502  
 relaciones de, 480

X-intersección, 291, 296, 298  
 XY-plano, 5

Y-intersección, 291, 297  
 Yates, corrección de, para la continuidad, 270-276  
 en tablas de contingencia, 270, 271, 280, 283



# Schaum



Los textos de la serie Schaum se han convertido en clásicos, por estar a la vanguardia en el estudio, y por ser una inestimable ayuda para el alumno a la hora de adquirir un conocimiento y pericia completos en la materia que se aborda.

Cada capítulo está estructurado de la siguiente manera:

- **Teoría:** resumen de las definiciones, principios y teoremas pertinentes, que sirve al estudiante como repaso.
- **Problemas resueltos:** completamente desarrollados, y en grado creciente de dificultad.
- **Problemas propuestos:** con la solución indicada; y que permiten al estudiante afianzar los conocimientos adquiridos.



9 788476 155622

Mc  
Graw  
Hill

ISBN: 84-7615-582-2