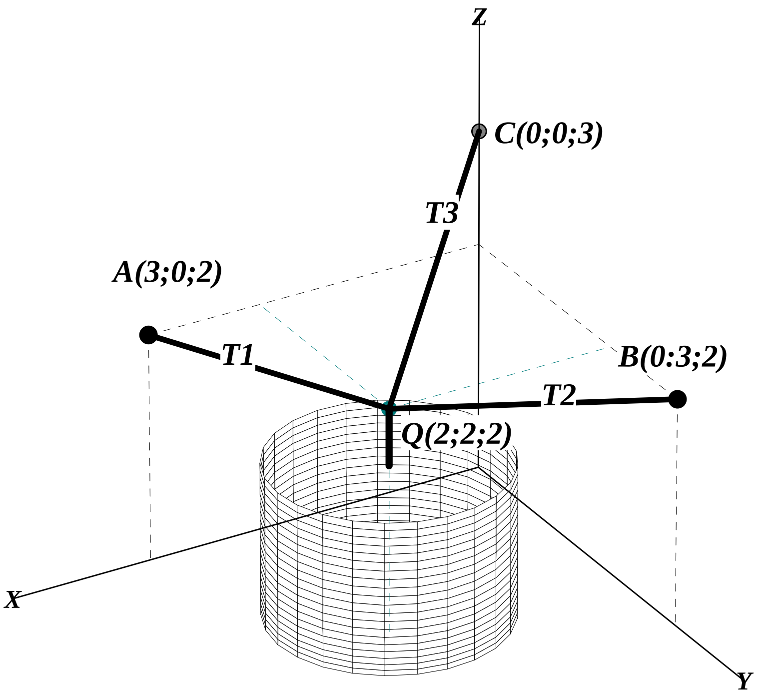
<u>Ejercicio resuelto.</u>

Se decide colgar un tanque de agua que pesa 15.000 N como se muestra en la figura.

a) Calcule las tensiones que deben ejercer los amarres. (las medidas están en metros)
b) Determine si se puede colgar con tres cadenas.
c) Dimensione los amarres mediante los catálogos de fabricantes.



Solución:

El sistema es concurrente en Q, de manera que es necesaria una única ecuación vectorial de equilibrio:

$$\sum_{i=1}^{4} F_i = \vec{O} \quad \textbf{(*)}$$

Por otra parte, el análisis no puede ser reducido a un plano porque el sistema, si bien es concurrente no es coplanar. <u>Debemos resolverlo en</u> $\underline{\mathbb{R}^3}$ y lo mas sencillo es hacerlo vectorialmente.

Determinemos las direcciones de los vectores.

$\vec{T}_1$ tendrá la dirección de $Q\vec{A}$ (desde *Q* hacia *A)*, dirección que es adoptada arbitrariamente. Podríamos haber tomado desde *A* hacia *Q* que después, al final, podremos determinar exactamente cuál es la dirección correcta.

$$Q\vec{A} = O\vec{A} - O\vec{Q} = (3;0;2) - (2;2;2) = (1:-2;0) \quad \textbf{(1)}$$

Y el versor de esa dirección es

$$Q\hat{A} = \frac{(1:-2;0)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \left({}^{1}\!/_{\sqrt{5}}; {}^{-2}\!/_{\sqrt{5}}; 0 \right) \quad \textbf{(2)}$$

Es decir, $\vec{T}_1$ hará fuerza en la dirección del versor $Q\hat{A}$ y por lo tanto podemos escribir que su vector será

$$\vec{T}_1 = T_1 \left({}^{1}\!/_{\sqrt{5}}; {}^{-2}\!/_{\sqrt{5}}; 0 \right) \quad \textbf{(3)}$$

<u>En la ecuación (3) se debe diferenciar $\vec{T}_1$ de T_1. Mientras que $\vec{T}_1$ representa al vector, T_1 representa su módulo, su intensidad. Observar que no tiene la flecha arriba. T_1 es la intensidad de la fuerza pues la dirección ya la supusimos.</u>

Continuamos análogamente con los cálculos para $\vec{T}_2$ y $\vec{T}_3$ suponiendo que las direcciones son las de $Q\hat{B}$ y¨ $Q\hat{C}$ respectivamente.

$$Q\vec{B} = O\vec{B} - O\vec{Q} = (0;3;2) - (2;2;2) = (-2;1;0) \quad \textbf{(4)}$$

$$Q\hat{B} = \frac{(-2;1;0)}{\left|Q\vec{B}\right|} = \frac{(-2;1;0)}{\sqrt{5}} = \left({}^{-2}\!/_{\sqrt{5}}; {}^{1}\!/_{\sqrt{5}}; 0 \right) \quad \textbf{(5)}$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \left({}^{-2}\!/_{\sqrt{5}}; {}^{1}\!/_{\sqrt{5}}; 0 \right) \quad \textbf{(6)}$$

$$Q\vec{C} = O\vec{C} - O\vec{Q} = (0;0;3) - (2;2;2) = (-2;-2;1) \quad \textbf{(7)}$$

$$Q\hat{C} = \frac{(-2;-2;1)}{\left|Q\vec{C}\right|} = \frac{(-2;-2;1)}{3} = \left({}^{-2}\!/_{3}; {}^{-2}\!/_{3}; {}^{1}\!/_{3} \right) \quad \textbf{(8)}$$

$$\vec{T}_3 = T_3 \left({}^{-2}\!/_{3}; {}^{-2}\!/_{3}; {}^{1}\!/_{3} \right) \quad \textbf{(9)}$$

El peso P del tanque, según el sistema de referencia que adoptamos, tiene la dirección opuesta a la del versor $\hat{k} = (0;0;1)$ (sentido creciente del eje $\boldsymbol{z}$), de esa forma

$$\vec{P} = 15.000(-\hat{k}) = 15.000(0;0;-1) \quad \textbf{(10)}$$

Ahora podemos conformar la ecuación **(*)** que puede leerse como *"para que un cuerpo solicitado por un sistema de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio estático la sumatoria vectorial de las fuerzas activas y reactivas debe ser el vector nulo"*

$$\sum_{i=1}^{4} F_i = \vec{O}$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{P} = \vec{O} = (0;0;0)$$

$$T_1\left(1/\sqrt{5} ; -2/\sqrt{5} ; 0 \right) + T_2\left(-2/\sqrt{5} ; 1/\sqrt{5} ; 0 \right) + T_3\left(-2/3 ; -2/3 ; 1/3 \right) + 15.000(0;0;-1) = (0;0;0) \quad \textbf{(11)}$$

Para que se cumpla la igualdad, la suma de las primeras componentes del primer miembro deberá ser igual a la primera componente del segundo miembro:

$$T_1\left(1/\sqrt{5} \right) + T_2\left(-2/\sqrt{5} \right) + T_3\left(-2/3 \right) + 15.000(0) = 0 \quad \textbf{(12)}$$

$$T_1\left(-2/\sqrt{5} \right) + T_2\left(1/\sqrt{5} \right) + T_3\left(-2/3 \right) + 15.000(0) = 0 \quad \textbf{(13)}$$

$$T_1(0) + T_2(0) + T_3\left(1/3 \right) + 15.000(-1) = 0 \quad \textbf{(14)}$$

Las ecuaciones (12), (13) y (14) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que de tener solución **será única**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & -2/3 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 15.000 \end{array} \right)$$

Resuelto el sistema nos queda

$$T_1 = -67.082{,}04N \cong -67.082N$$
$$T_2 = -67.082{,}04N \cong -67.082N$$
$$T_3 = 45.000N$$

Ahora bien, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ y $\vec{T}_3$ son las intensidades de las tensiones y **no pueden ser negativas**, entonces ¿qué significan los signos negativos de $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ en las soluciones halladas?

Significa que los sentidos arbitrarios de $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ que tomamos para resolver el problema son los opuestos.

Es decir $\vec{T}_1$ no tendrá la dirección de $Q\vec{A}$ sino la de $A\vec{Q}$, la opuesta de la tomada. Esto quiere decir que será

$$\vec{T}_1 = -T_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}; 0 \right) = 67.082\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0 \right) N$$

Por otra parte $\vec{T}_2$ tampoco tendrá la dirección de $Q\vec{B}$ sino la de $B\vec{Q}$, quedando

$$\vec{T}_2 = -T_2\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right) = 67.082\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{-1}{\sqrt{5}}; 0 \right)$$

Ahora sí, la solución que equilibra al sistema es

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{T}_1 &= 67.082\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0 \right) N = (-30.000; 60.000; 0)\, N \\ \vec{T}_2 &= 67.082\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right) = (60.000; -30.000; 0)\, N \\ \vec{T}_3 &= 45.000\left(\frac{-2}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3} \right) = (-30.000; -30.000; 15.000) \end{aligned}}$$

Observación: siempre conviene hacer una verificación cada vez que se hace un cálculo. Reemplace los datos obtenidos en la ecuación **(11)** y observe que se cumple.

¿Qué puede usted decir de lo que pide la parte (b) del ejercicio? ¿Podrá sostenerse el sistema con tres cadenas?. Obviamente **NO.** $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ hacen fuerza **hacia el punto *Q*** y eso no puede lograrse con cadenas. Las cadenas o los cables no pueden trabajar a la compresión, por lo tanto deberán ser, por ejemplo barras rígidas. Observe que si fueran cadenas el tanque se caería hacia las paredes.

Nota final: el gráfico fue realizado con winplot, programa del que les envié una copia..